UNIVERSITATEA „DUNĂREA DE JOS” GALAȚI

Cristian MUNTENIȚĂ
Carmelia Mariana DRAGOMIR BĂLĂNICĂ
Geanina Marcela PODARU

ELEMENTE DE INGINERIE MECANICĂ

ÎNDRUMAR DE LABORATOR

EDITURA FUNDAȚIEI UNIVERSITARE
„Dunărea de Jos” Galați - 2019
ISBN 978-973-627-627-9

UNIVERSITATEA DUNĂREA DE JOS GALAȚI

Editura Fundaţiei Universitare „Dunărea de Jos”
din Galaţi

este acreditată de CNCSIS

Referent științific: Conf. dr. ing. Sorin CIORTAN

Director, prof. dr. emerit Cosma Tudose

www.editura.ugal.ro
editura@ugal.ro

ISBN 978-973-627-627-9

Cuvânt înainte

Mathcad este folosit pentru realizarea, documentarea şi lucrul colaborativ cu calcule inginereşti, metode şi algoritmi de calcul în proiectare. Formatul vizual unic şi interfaţa whiteboard uşor de utilizat, care integrează într-o singură foaie de calcul notaţii matematice standard, text şi reprezentări grafice, fac din Mathcad soluţia ideală pentru captarea şi valorificarea cunoştinţelor asociate calculelor şi pentru îmbunătăţirea colaborării în proiectare. Cu Mathcad, avem libertatea de a lucra interactiv, pe proiecte ce pot fi uşor modificate, având acces la metodele si algoritmii de calcul care au stat la baza fiecărui proiect.

Modul de lucru cu Mathcad poate rezolva orice problemă de matematică imaginabilă, numeric sau simbolic. Scrierea ecuaţiilor în Mathcad se face exact ca în teoria matematică, nefiind necesară învăţarea vreunei sintaxe complicate, iar rezultatele formulelor şi ecuaţiilor se obţin imediat. În plus, pentru o documentare completă a calculelor, pot fi inserate oriunde în foaia de calcul zone de text, reprezentări grafice, imagini, animaţii, etc.

Spre deosebire de programele de calcul tabelar, unde ecuaţiile sunt exprimate criptic, iar conversia între sisteme de unităţi diferite este imposibilă, sau, de limbajele de programare, accesibile îndeosebi programatorilor, Mathcad reprezintă o modalitate mult mai bună de efectuare şi administrare a calculelor inginereşti, acestea fiind uşor de realizat, înţeles, verificat, comunicat şi urmărit logic.

Mathcad realizează corelarea şi conversia între sisteme de unităţi de măsură diferite, cu corectarea implicită a erorilor şi cu asigurarea consistenţei dimensionale. Mathcad permite efectuarea unui calcul într-un anumit sistem de unităţi, în timp ce, numai pentru un anumit set de ecuaţii/secvenţe, calculul să se facă într-un sistem de unităţi diferit. Prin integrarea de ecuaţii, text şi reprezentări grafice într-o singură foaie de calcul, Mathcad uşurează urmărirea logică a procedurilor şi iteraţiilor de calcul, indiferent de complexitate.

Beneficii

- calculul - numeric sau simbolic, modelarea şi reprezentarea vizuală a oricărei idei;
- lucrul interactiv pe proiecte ce pot fi modificate cu uşurinţă, modificarea unei variabile conducând la recalcularea automată a ecuaţiilor, actualizarea instantanee a graficelor şi a parametrilor de proiectare;

- realizarea de grafice printabile în format 2D şi 3D;
- verificarea, reprezentarea vizuală şi adnotarea soluţiilor pentru orice disciplină.

Funcţionalităţi de calcul

- calcul numeric: calcule aritmetice, calcul diferenţial şi integral, operaţii Booleene, funcţii trigonometrice, exponenţiale, hiperbolice, transformate;
- calcul simbolic: simplificarea expresiilor matematice, calcul derivatelor şi primitivelor, dezvoltări în serie Taylor, determinarea transformatei directe şi inverse Fourier, Laplace;
- calcul vectorial şi matriceal: operaţii cu şiruri, diferite operaţii de algebră liniară, inclusiv determinarea de vectori şi valori proprii;
- calcul statistic şi analiza de date: generare numere aleatorii, reprezentarea grafică prin histograme, calcul de interpolare, modele de distribuţie probabilistică;
- rezolvarea de ecuaţii diferenţiale ordinare sau cu derivate parţiale, sisteme de ecuaţii diferenţiale, probleme de calcul variaţional cu condiţii la limită;

Detalii funcţionalităţi

- dispunerea calculelor şi afişarea soluţiei în Mathcad;
- funcţionalităţi de calcul numeric şi simbolic, în timp real;
- operatori (mai mult de 17 operatori aritmetici, 12 operatori pentru calcul vectorial şi matriceal, 5 operatori sumă şi produs, 2 operatori diferenţiali şi 5 operatori pentru calculul integralelor şi limitelor de funcţii şi şiruri, 9 operatori pentru operaţii de evaluare a expresiilor aritmetice, 10 operatori pentru evaluări de expresii logice (Booleene)).
- reprezentări grafice;
- reprezentarea grafică a funcţiilor se poate face în coordonate carteziene, polare, grafice cu bare, de tip scatter, reprezentări vectoriale, linii de contur zonal sau tip izosuprafeţe;
- reprezentarea grafică a funcţiilor de o variabilă: curbe în coordinate carteziene, polare sau curbe date de ecuaţii parametrice;
- reprezentarea grafică a suprafeţelor cu ajutorul operatorului QuickPlot™;
- funcţii intrinseci;
- personalizarea şi extinderea aplicaţiei;
- soluţionare (7 funcţii intrinseci pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii, 18 funcţii intrinseci pentru soluţionarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare sau cu derivate parţiale);
- funcţii de editare a documentelor;
- siguranţă şi uşurinţă în utilizare;

- format fişiere, suport pentru publicare şi pentru web;
- transfer de date (formatului nativ XML, importă fişiere .mat, Excel, Lotus 1-2-3, ASCII, binare, etc.);
- interoperabilitate cu alte aplicaţii, inclusiv: Microsoft® Excel şi PowerPoint, MathWorks MATLAB®, National Instruments® LabVIEW™, Bentley Microstation®, ANSYS Workbench™;
- integrarea Mathcad în Pro/ENGINEER;
- resurse (tabele, formule de bază, constante, bază de cunoştinţe conţinând informaţii specializate pentru suport tehnic, tutoriale în detaliu pentru toată gama de aplicaţii Mathcad, Help on-line, uşor de utilizat, cu opţiuni de căutare şi index alfabetic, peste 300 de formate tip QuickSheets pentru analize şi operaţii standard, dicţionare în 11 limbi, forumuri ale utilizatorilor, biblioteci Web Resurse hardware).

Autorii,

Cuprins

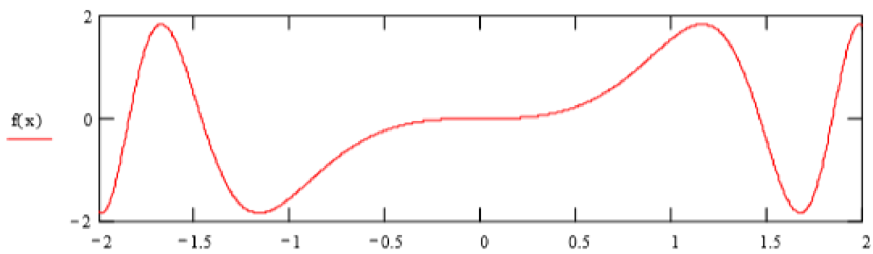
Cuvând înainte	
Introducere în inginerie mecanică prin aplicații de tip Mathcad	6
Lucrare de laborator nr. 1 Operații cu vectori	10
Lucrare de laborator nr. 2 Rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații. Operații cu matrici	12
Lucrare de laborator nr. 3 Caracteristici geometrice	17
Lucrare de laborator nr. 4 Reacțiuni în bare drepe	19
Lucrare de laborator nr. 5 Dimensionarea barelor drepte	23
Lucrare de laborator nr. 6 Asamblări filetate	25
Lucrare de laborator nr. 7 Elemente geometrice ale roților dințate cilindrice cu dinți drepți	28
Aplicații individuale	33

Pentru citirea unui fișier se procedează astfel: se poziționează prompter-ul unde se dorește inserarea (fără a defini o variabilă) se accesează comanda: INSERT-COMPONENT-FILEREAD/WRITE, apoi se alege tipul de fișiei, în general text. După inserare apare și placeholderu-ul care se completează cu numele dorit. Fișierul apare ca icon, dar se poate afișa prin procedee normale (a:=).

Pentru scrierea unui fișier se folosesc două funcții: WRITE – care reprezintă calea către fișiei de tipul (c:/test.txt) :=a sau WRITEPRN (c:/test2.txt) :=a.

Cu ajutorul acestei aplicații se pot realiza grafice 2D sau în plan (unde este folosit un sistem de coordonate bidimensional), (figura 1) și 3D sau în spațiu (unde este folosit un sistem de coordonate tridimensional).

***Exemplu**: a:=22; b:=12; c:=3;* $f_{(x)} := \frac{a}{b} \cdot sin(x^3)$



***Exemplu**: d:=120; p:=0…8; j:=0…2,*

unde: d – diametrul

p – presiunea

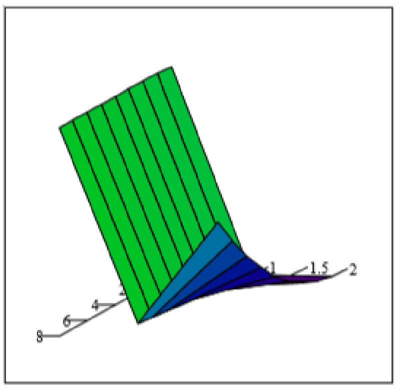
j – index

$a_{p,j} := p^2 + \frac{p}{2}\ if\ j = 2$

otherwise: p if j=1

d otherwise

$$a = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 120 & 1 & 1.5 \\ 120 & 2 & 5 \\ 120 & 3 & 10.5 \\ 120 & 4 & 18 \\ 120 & 5 & 27.5 \\ 120 & 6 & 39 \\ 120 & 7 & 52.5 \\ 120 & 8 & 68 \end{bmatrix}$$



a

Graficele 3D în Mathcad se fac pe baza unei matrici cu trei coloane una cu coordonatele pe x una cu cele pe y și a treia cu valorile pe z. De exemplu: pentru afișarea grosimii peretelui recipentului în funcție de presiunea și diametrul corpului. Pentru presiune se declară o variabilă domeniu cu limitele și pasul dorit. Numărul de valori este și numărul de linii a matricii. Pentru numărul de coloane se declară un index ca variabilă domeniu cu trei valori de la 0 la 2. Diametrul se declară ca valoare fixă sau, dacă este cazul, tot ca variabilă domeniu. Pentru generarea elementelor matricii se folosesc două instrucțiuni "if" imbricate, elementul ai, j fiind calculat funcție de presiunea i și diametru.

În MathCAD, instrucțiunea condițională IF poate fi utilizată pentru afișarea grafică a funcțiilor definite pe domenii. Instrucțiunea este activată din paleta Programming.

Pentru folosirea instrucțiunii se procedează în felul următor:

1. Se activează palea Programming
2. Se introduce operatorul Add Line
3. Se introduce operatorul IF în dreptunghiul superior și operatorul Otherwise în cel inferior

Observații:

a. operatorii se introduc numai din paleta, nu prin scriere de la tastatură

b. instrucțiunile pot fi combinate, repetând pașii anteriori pentru dreptunghiul din dreptul operatorului Otherwise

IF reprezintă o funcție care se calculează astfel:

```
b := | j ← 0
     | i ← 1
     | while  i < 12370
     |    | if  a[i−1,1] < a[i,1] > a[i+1,1]
     |    |    | b[j,0] ← j + 1
     |    |    | b[j,1] ← a[i,1]
     |    |    | j ← j + 1
     |    | i ← i + 1
     | b
```

Dacă se dorește efectuarea a mai multor operații pentru aceeași condiție de IF, în loc de sintaxa uzuală: s:=if sau s:=otherwise se utilizează s:=if sau s:=, astfel se poate ignora funcția otherwise.

Intrucțiunile WHILE (ciclu de test final) se folosesc atunci când nu se cunoaște numărul de pași până la îndeplinirea funcției sau, sunt prea mulți ca să poată fi numărați ușor. Dacă numărul de pași până la realizarea condițiai este cunoscut, se utilizează *ciclul FOR* (ciclu cu test inițial).

Pentru rezolvarea sistemelor de ecuații se folosește funcția find(), funcția se utilizează într-un bloc de calcul care începe cu "Given" scris în regiune matematică și se încheie cu funcția. Necunoscutele se declară inițial cu valoare 1. După Given se scriu ecuațiile folosind pentru egal semnul din paleta de calcul logic și nu egalul uzual. Rezultatul este o matrice cu atâtea elemente câte necunoscute sunt. Necunoscutele se scriu în argumentul funcției separate cu virgule. Artificiul cu scrierea unei matrici cu necunoscutele și atribuirea ca valoare a funcție Find() este utilă pentru actualizarea valorilor necunoscutelor în vederea calculelor ulterioare.

Exemplu: $x_a := 10; x_b := 12; x_c := 1$

$y_a := 16; y_b := 18; y_c := 1$ $\qquad L := 34$

GIVEN

$(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2 - L^2 = 0$

$$\frac{x_a - x_b}{x_b - x_c} = \frac{y_a - y_b}{y_b - y_c}$$

$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$:=fiind$(x_c \cdot y_c)$ unde $x_c = -12.042$

$y_c = -6.042$

Dacă nu se declară valori inițiale pentru necunoscutele sistemelor, se rezolvă simbolic folosind aceeași funcție Find (). În această situație nu se folosește semnul = pentru obținerea rezultatelor, și semnul EVALUATE SYBOLICALY din paleta de ciclu logic.

Given

$x + 2\pi y = a$

$4x + y = b$

$$\text{find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{(-1+8\cdot\pi)}\cdot(2\cdot\pi\cdot b - a) \\ \frac{(4\cdot a - b)}{(-1+8\cdot\pi)} \end{bmatrix}$$ ***sistem cu o singură soluție***

Determinarea simbolică dintre un cerc și o linie:

Given

$$x^2 + y^2 = r^2$$

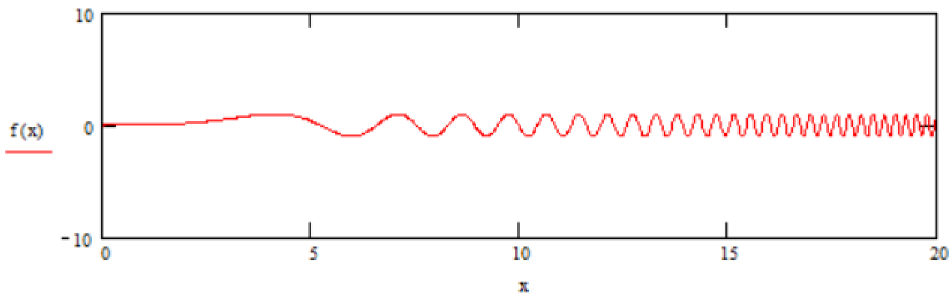
$$x + y = c$$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot c - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-c^2 + 2 \cdot r^2} & \frac{1}{2} \cdot c + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-c^2 + 2 \cdot r^2} \\ \frac{1}{2} \cdot c + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-c^2 + 2 \cdot r^2} & \frac{1}{2} \cdot c - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-c^2 + 2 \cdot r^2} \end{bmatrix}$$

sistem cu două soluții afișate ca două coloane într-o matrice cu x pe prima linie și y pe a doua linie.

Pentru a crea o animație în MathCAD se folosește comanda: View-Animate. Animația se execută pe baza unei variabile predefinite - ***FRAME***. Toate elementele ce se doresc a fi animate trebuie să fie dependente de aceasta. În fereastra activată de comanda *animate* se introduc valorile corespunzătoare acestei variabile. Din *Option* se alege codec-ul video, pentru exemplul acesta se alege ultima opțiune - *cadre necomprimate*. După setarea parametrilor se selectează zona ce se dorește a fi animată. Va rezulta un grafic conform celui prezentat mai jos.

Exemplu:



Pentru animarea graficului se introduce ca valoare de capăt de scală pe axa X variabilă implicită **FRAME** (graficul dispare) și se activează comanda *Animate*.

LABORATOR 1

Operații cu vectori

Un vector poate fi definit prin coordonatele punctului de aplicație și respectiv, al vârfului său. În MathCAD un vector este definit ca fiin o matrice care conține coordonatele punctelor respective, ordonate pe o linie.

Exemplu: Fie vectorul A definit de punctele **a** (având coordonatele x_a și y_a) și **b** (având coordonatele x_b și y_b), cu valorile numerice:

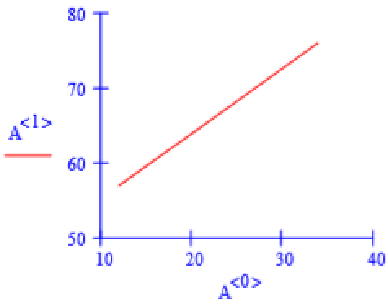
$x_a := 12 \quad y_a := 57$

$x_b := 34 \quad y_b := 76$

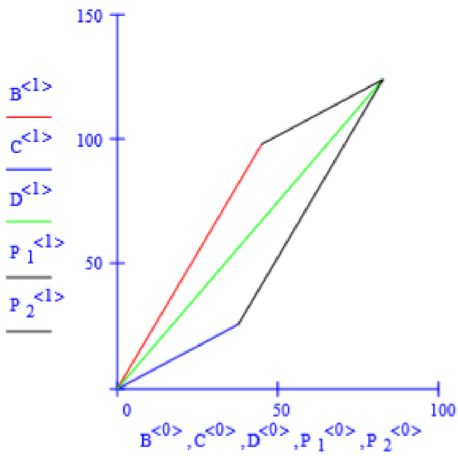
În această situație ecuația de definire a vectorului va avea următoarea formă:

$A := \begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix}$ și numeric $A = \begin{bmatrix} 12 & 57 \\ 34 & 76 \end{bmatrix}$

Pentru definirea matricei vectorului se utilizează comanda "Insert Matrix". În vederea afișării grafice a vectorului se folosește un grafic 2D, având ca variabilă pe axa X coloana corespunzătoare coordonatelor X ale punctelor semnificative iar ca variabila pe axa Y coloana corespunzătoare coordonatelor Y ale punctelor semnificative. Se utilizează în acest scop operatorul "matrix column", disponibil în bara de unelte Matrix cu simbolul n< >, între paranteze indicându-se numărul coloanei respective. Pentru exemplul de mai sus reprezentarea grafică este prezentată în imaginea de mai jos.



În vederea reprezentării grafice a operației de adunare a doi vectori, prin metoda paralelogramului, se presupune că se dau vectorii B și C care au coordonatele punctelor semnificative $b_{1,2,3,4}$ și respectiv $c_{1,2,3,4}$:

Punctul de aplicație al vectorului B	$b_1 := 0$	$b_2 := 0$
Vârful vectorului B	$b_3 := 45$	$b_4 := 98$
Punctul de aplicație al vectorului C	$c_1 := 0$	$c_2 := 0$
Vârful vectorului C	$c_3 := 38$	$c_4 := 26$
Vectorul B	$B := \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 45 & 98 \end{bmatrix}$
Vectorul C	$C := \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 38 & 26 \end{bmatrix}$
Vectorul D	$D := \begin{bmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 83 & 124 \end{bmatrix}$
Vectorii care închid paralelogramul, P_1 și P_2	$P_1 := \begin{bmatrix} b_3 & b_4 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{bmatrix}$	$P_2 := \begin{bmatrix} c_3 & c_4 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{bmatrix}$
	$P_1 = \begin{bmatrix} 45 & 98 \\ 83 & 124 \end{bmatrix}$	$P_2 = \begin{bmatrix} 38 & 26 \\ 83 & 124 \end{bmatrix}$
Reprezentarea grafică		

LABORATOR 2

Rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații. Operații cu matrici

MathCAD oferă mai multe soluții de rezolvare a ecuațiilor și a sistemelor de ecuații, dintre care *rezolvarea simbolică* are cel mai ridicat grad de generalitate. Metoda presupune deschiderea unui bloc de calcul folosind cuvântul rezervat ***Given***, introducerea ecuației sau a ecuațiilor (pentru sisteme) și obținerea rezultatului folosind funcția ***find()*** și ***operatorul de evaluare simbolică*** din paleta de calcul logic (Boolean). Pentru folosirea metodei se parcurg etapele:

1. Se scrie cuvântul ***Given***, în regiune matematică
2. Se scriu ecuațiile, folosind semnul = din paleta de calcul logic
3. Se aplică funcția ***find()*** având ca argumente necunoscutele

Observații: a. între cuvântul ***Given*** și funcția ***find()*** se introduc DOAR ecuațiile și nimic altceva.

b. întrucât evaluarea necunoscutelor este simbolică, se recomandă utilizarea unei variabile intermediare căreia i se atribuie valoarea funcției ***find()***.

Aplicația 1

Given	$x+2\cdot\pi\cdot y=34$	$4\cdot x+y=45$
Sistem cu o singură soluție	$\text{find}(x,y)\rightarrow\begin{bmatrix}2\cdot\frac{(45\cdot\pi-17)}{(-1+8\cdot\pi)}\\\frac{91}{(-1+8\cdot\pi)}\end{bmatrix}$	
Dacă se folosește variabila intermediară pentru aflarea soluției finale		
Given	$x+2\cdot\pi\cdot y=34$	$4\cdot x+y=45$
	$a:=\text{find}(x,y)\rightarrow\begin{bmatrix}2\cdot\frac{(45\cdot\pi-17)}{(-1+8\cdot\pi)}\\\frac{91}{(-1+8\cdot\pi)}\end{bmatrix}$	
	$a=\begin{bmatrix}10.307\\3.771\end{bmatrix}$	
Determinarea simbolică a intersecției dintre un cerc și o linie	$r:=12$	$c:=2$
Given	$x^2+y^2=r^2$	$x+y=c$

Sistemul are de această dată două soluții, afișate ca două coloane într-o matrice cu x pe prima linie și y pe a doua	$a := find(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} 1-\sqrt{71} & 1+\sqrt{71} \\ 1+\sqrt{71} & 1-\sqrt{71} \end{bmatrix}$	$a = \begin{bmatrix} -7.426 & 9.426 \\ 9.426 & -7.426 \end{bmatrix}$
Să se rezolve sistemele de ecuații		
Sistem I	$x^3 + 2 \cdot x \cdot y^2 - 7 \cdot z = 234$; $\frac{z}{6 \cdot x} + z^2 - y = 675$; $z^2 + x + y = 67$	
Sistem II	$x + y = 7$; $x + 2 \cdot y - z \cdot t = 124$; $x^2 + y^3 = 234$; $x - y = 23$; $x + 2 \cdot y = 123$; $\frac{y}{t} + 3 \cdot x - z = 23$; $x \cdot t + 4 \cdot y - z = 2$	
Sistem III		
Sistem IV		

Să se folosească metoda prezentată mai sus pentru rezolvarea individuală a următoarelor ecuații în care: a=13; b=3; t=45.

$x^2 - 23 \cdot a = 4$	$\frac{z}{7} + \frac{456}{b} = 8$	$y - 3425 + t^2 = 85$

Aplicația 2

	$x^3 + 2 \cdot x \cdot y^2 - 7 \cdot z = 234$	$\frac{z}{6 \cdot x} + z^2 - y = 675$	$z^2 + x + y = 67$
Given	$x + 2 \cdot x + y - 7 \cdot z = 234$	$\frac{z}{6} + z - y - x = 675$	$z + x + y = 67$
	$rezultat := find(x, y, z) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{37787}{26} \\ \frac{-44949}{26} \\ \frac{4452}{13} \end{bmatrix}$	$rezultat = \begin{bmatrix} 1.453 \cdot 10^3 \\ -1.729 \cdot 10^3 \\ 342.462 \end{bmatrix}$	

Să se folosească metoda prezentată mai sus pentru rezolvarea individuală a următoarelor ecuații în care: t=45.

$x^2 - 23 = 4$	$\frac{z}{7} + 456 = 8$	$y - 3425 + t^2 = 85$

Aplicația 3

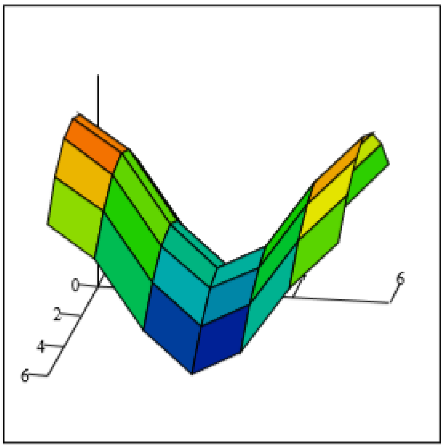
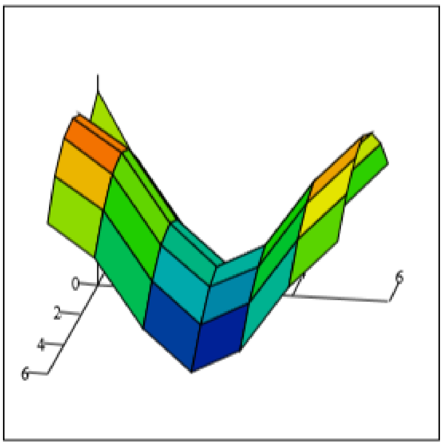
Să se reprezinte grafic, utilizînd funcția IF succesive, următoarele funcții:

a)	$F(x)=\begin{cases} \sin(x^3/34)-27x & \text{daca } x<23 \\ \cos(x^3/34)-3x & \text{daca } 23<x<40 \\ \sin(x/4)-27x^2 & \text{daca } 40<x<63 \\ \sin(x/34)-\cos(x/67) & \text{daca } 63<x<100 \end{cases}$
b)	$G(x)=\begin{cases} \cos(x^4/2)-x/5 & \text{daca } x<3 \\ \sin(x/2)-3x+4 & \text{daca } 3<x<10 \\ x^2+x+4 & \text{daca } 10<x<20 \\ \cos(x^2/4)-27x^2 & \text{daca } 20<x<70 \\ \tan(x^2)+4x & \text{daca } 70<x<80 \\ \sin(x)-\cos(x) & \text{daca } 80<x<100 \end{cases}$
c)	$H(x)=\begin{cases} x & \text{daca } x<2 \\ 2x-3/x & \text{daca } 2<x<4 \\ x+4 & \text{daca } 4<x<8 \\ x^2/4 & \text{daca } 8<x<10 \\ x^2+6x & \text{daca } 10<x<20 \end{cases}$

În cazul matricelor, se utilizează în cele mai multe din cazuri plotarea matricelor. Această operațiune se face folosind comanda Surface Plot din paleta de grafice. Pe axele X și Y se regăsesc numărul de linii și, respectiv, coloane. Pe axa Z se regăsește valoarea elementului de la poziția x-y. Pentru exemplificare se definește o matrice A. Pentru definirea unei matrici se definesc doi indici, corespunzători liniilor și coloanelor, cu valori de la numărul maxim de linii, respectiv coloane:

Aplicația 4

	$i := 0..6$	$j := 0..6$
Se definesc apoi elementele matricei, folosind operatorul X_n	$A_{i,j} := \sin\left(\frac{i}{2}\right) + \cos(j)$	

<table>
<tr><td>Se determină valoarea matricei</td><td colspan="2">$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.54 & -0.416 & -0.99 & -0.654 & 0.284 & 0.96 \\ 1.479 & 1.02 & 0.063 & -0.511 & -0.174 & 0.763 & 1.44 \\ 1.841 & 1.382 & 0.425 & -0.149 & 0.188 & 1.125 & 1.802 \\ 1.997 & 1.538 & 0.581 & 7.502 \cdot 10^{-3} & 0.344 & 1.281 & 1.958 \\ 1.909 & 1.45 & 0.493 & -0.081 & 0.256 & 1.193 & 1.869 \\ 1.598 & 1.139 & 0.182 & -0.392 & -0.055 & 0.882 & 1.559 \\ 1.141 & 0.681 & -0.275 & -0.849 & -0.513 & 0.425 & 1.101 \end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Se afișează graficul matricei</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Pentru obținerea unui grafic animat se definește o matrice funcție de variabila implicită FRAME:</td><td>$i := 0 .. FRAME$</td><td>$j := 0 .. FRAME$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$$A_{i,j} := \sin\left(\frac{i-12}{3}\right) + \cos\left(\frac{j}{12}\right)$$</td><td colspan="2">$$A = \begin{bmatrix} 1.757 & 0.54 & -0.416 & -0.99 & -0.654 & 0.284 & 0.96 \\ 1.479 & 1.02 & 0.063 & -0.511 & -0.174 & 0.763 & 1.44 \\ 1.841 & 1.382 & 0.425 & -0.149 & 0.188 & 1.125 & 1.802 \\ 1.997 & 1.538 & 0.581 & 7.502 \cdot 10^{-3} & 0.344 & 1.281 & 1.958 \\ 1.909 & 1.45 & 0.493 & -0.081 & 0.256 & 1.193 & 1.869 \\ 1.598 & 1.139 & 0.182 & -0.392 & -0.055 & 0.882 & 1.559 \\ 1.141 & 0.681 & -0.275 & -0.849 & -0.513 & 0.425 & 1.101 \end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Pentru identificarea elementelor dorite se folosește operatorul x_n unde "n" se completează cu numărul de linie și coloana corespunzător. De exemplu se dă matricea A:

$$A := \begin{bmatrix} 12 & 34 & 56 & 21 & 30 \\ 58 & 42 & 65 & 87 & 90 \\ 22 & 54 & 73 & 92 & 88 \\ 37 & 9 & 4 & 7 & 22 \\ 15 & 38 & 97 & 30 & 66 \end{bmatrix}$$

Să se rezolve următorul sistem de ecuații:

$$\left(x + 2 \cdot a \cdot y - 3 \cdot \frac{z}{b}\right) + 4 \cdot z \cdot c = 22 \qquad 2 \cdot \frac{x}{3 \cdot d} + 12 \cdot z - e \cdot y = 45 \qquad x + 46 \cdot y - f \cdot z = 121$$

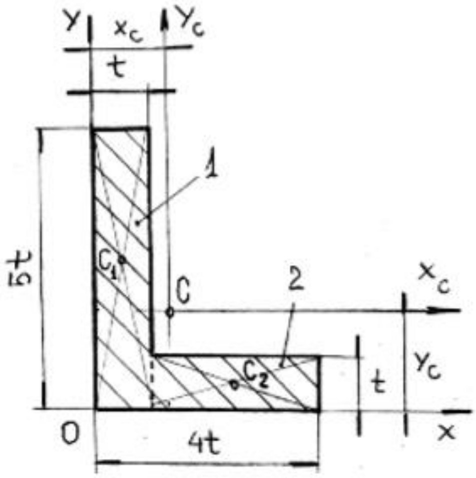
unde: $a := A_{0,2}$; $b := A_{3,4}$; $c := A_{0,0}$; $d := A_{2,1}$; $e := A_{3,3}$; $f := A_{4,1}$

LABORATOR 3

Caracteristici geometrice

Aplicația 1

Să se determine poziția centrului de greutate pentru placa omogenă prezentată în figura de mai jos:



Parametri	$t := (10 + 0.1 \cdot n) \cdot cm$	$t = 0.102 \cdot m$	$n := 2$

Pentru început se imparte suprafața în arii elementare simple – două dreptunghiuri în cazul de față – calculându-se ariile respective.

$A_1 := 5 \cdot t \cdot t$	$A_2 := 3 \cdot t \cdot t$
$A_1 = 0.031 \cdot m^2$	$A_2 = \quad \cdot m^2$

Se continuă cu definirea unui sistem de axe de coordonate x0y, identificarea centrelor de greutate C_1 și C_2 ale suprafețelor elementare și stabilirea coordonatelor respective.

Pentru aria A_1, cu centrul de greutate în C_1:

$x_1 := 0.5 \cdot t$	$x_1 = 0.051 \cdot m$	$y_2 := 0.5 \cdot t$	$y_1 = 0.255 \cdot m$

Pentru aria A1, cu centrul de greutate în C_2:

$x_2 := 2.5 \cdot t$	$x_2 = 0.255 \cdot m$	$x_1 = 0.051 \cdot m$	$y_2 = 0.051 \cdot m$

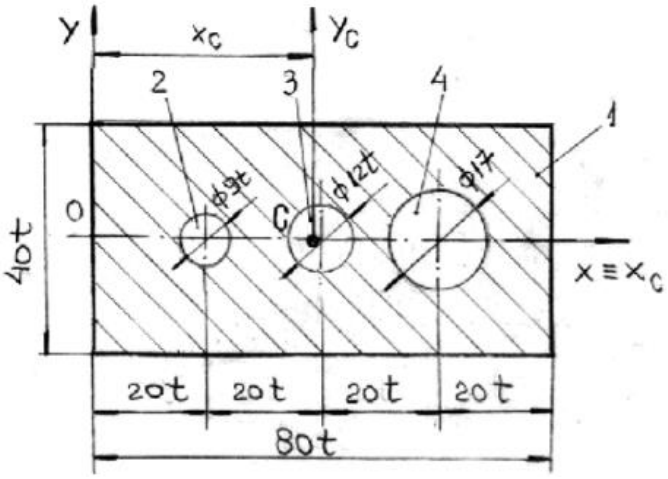
Se calculează coordonatele centrului de greutate folosind relațiile următoare:

$x_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$	$y_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$	$z_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

$x_C := \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2}$	$x_C = 0.128 \cdot m$	$y_C := \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2}$	$y_C = 0.178 \cdot m$

Aplicația 2

Să se determine poziția centrului de greutate pentru placa omogenă prezentată în figura de mai jos:



Parametru	$t := (10 + 0.1 \cdot n) \cdot cm$

Se imparte suprafața în arii elementare simple – un dreptunghi și trei cercuri în cazul de față – calculându-se ariile respective.

$A_1 := 40 \cdot t \cdot 80 \cdot t$	$A_2 := \frac{\pi \cdot (9 \cdot t)^2}{4}$	$A_3 := \frac{\pi \cdot (12 \cdot t)^2}{4}$	$A_4 := \frac{\pi \cdot (17 \cdot t)^2}{4}$
$A_1 = 33.293 \cdot m^2$	$A_2 = 0.662 \cdot m^2$	$A_3 = 1.177 \cdot m^2$	$A_4 = 2.362 \cdot m^2$

Pentru determinarea coordonatelor centrelor de greutate se observă că acestea sunt coliniare, deci, alegând sistemul de referință în mod corespunzător este necesară stabilirea numai a absciselor acestora:

$x_1 := 40 \cdot t$	$x_2 := 20 \cdot t$	$x_3 := 40 \cdot t$	$x_4 := 60 \cdot t$
$x_1 = 4.08 \cdot m$	$x_2 = 0.255 \cdot m$	$x_3 = 4.08 \cdot m$	$x_4 = 6.12 \cdot m$

Pentru aria A1, cu centrul de greutate în C_2:

$x_2 := 2.5 \cdot t$	$x_2 = 0.255 \cdot m$	$x_1 = 0.051 \cdot m$	$y_2 = 0.051 \cdot m$

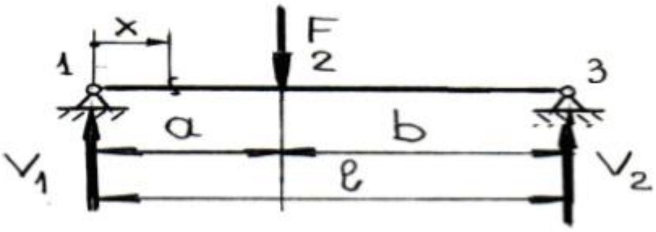
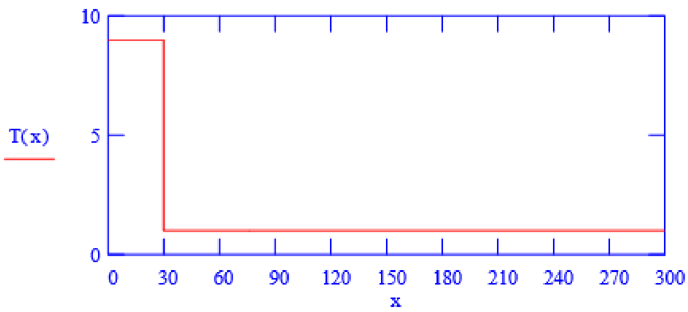
Abscisa centrului de greutate a suprafeței:

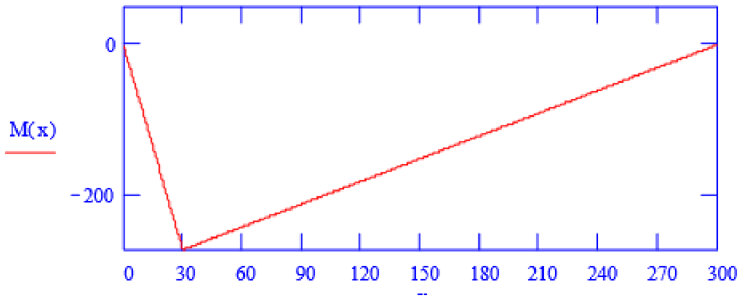
$x_G := \frac{A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 - A_3 \cdot x_3 - A_4 \cdot x_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$	$x_G = 3.073 \cdot m$

LABORATOR 4

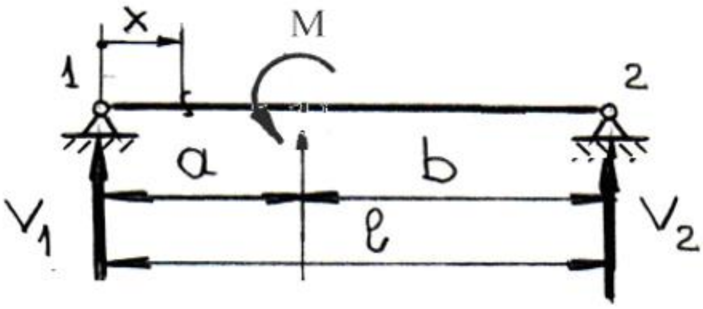
Reacțiuni în bare drepe

Aplicația 1 Bară siplu rezemată cu forță concentrată

<table>
<tr><td colspan="6">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Definirea variabilelor inițiale:</td></tr>
<tr><td>Lungimea barei [mm]</td><td colspan="2">Cota a [mm]</td><td colspan="2">Cota b[mm]</td><td>Forța concentrată [kN]</td></tr>
<tr><td>$l := 300$</td><td colspan="2">$a := 30$</td><td colspan="2">$b := l - a$</td><td>$F_2 := 10$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Calculul reactiunilor:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reactiunea V_1 : se stabilește din ecuația de momente față de punctul 3</td><td colspan="2">Reactiunea V_2 : se stabilește din ecuația de momente față de punctul 1</td><td colspan="2">Verificarea reacțiunilor: valoarea următoarei expresii trebuie să fie 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$V_1 := \frac{F_2 \cdot b}{l}$</td><td colspan="2">$V_2 := \frac{F_2 \cdot a}{l}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$V_1 + V_2 - F_2 =$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$V_1 = 0$</td><td colspan="2">$V_2 =$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Trasarea diagramelor de forțe și momente.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Diagrama de forțe tăietoare: se definește o funcție T(x)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$T(x) := \begin{vmatrix} V_1 & \text{if } x \le a \\ V_2 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$</td><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Diagrama de momente încovoietoare: se definește o funcție M(x)</td></tr>
</table>

$M(x) := \begin{cases} V_1 \cdot (-x) & \text{if } x \le a \\ V_1 \cdot (-x) + F_2 \cdot (x - a) & \text{otherwise} \end{cases}$	

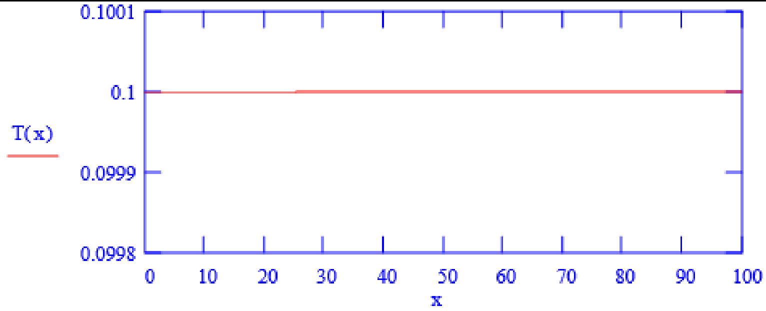
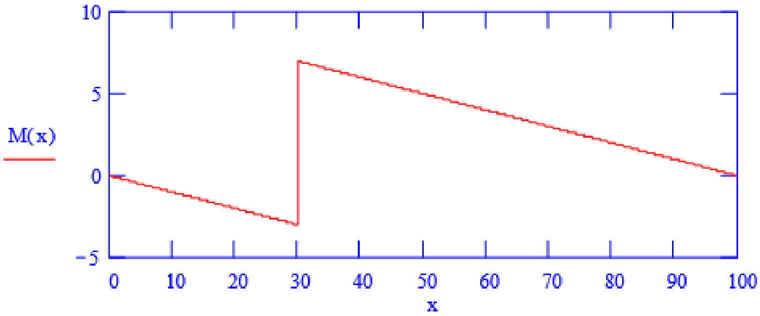
Aplicația 2 Bară simplu rezemata cu moment concentrat



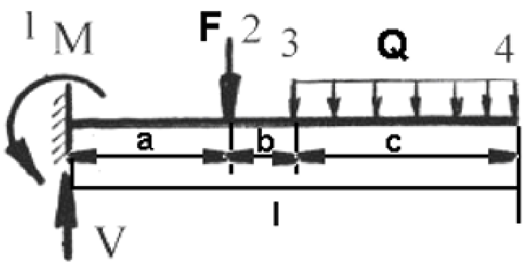
Definirea variabilelor inițiale:			
Lungimea barei [mm]	Cota a [mm]	Cota b[mm]	Forța concentrată [kN]
$l := 100$	$a := 30$	$b := l - a$	$M := 10$

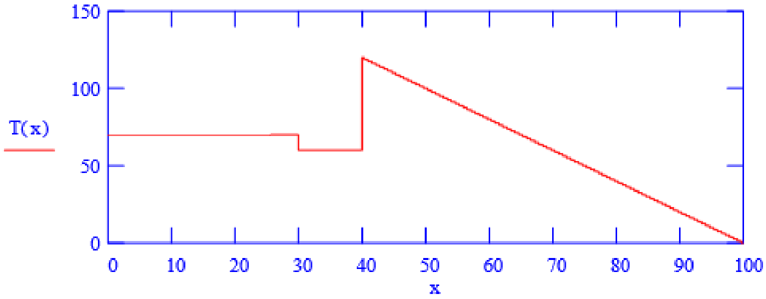
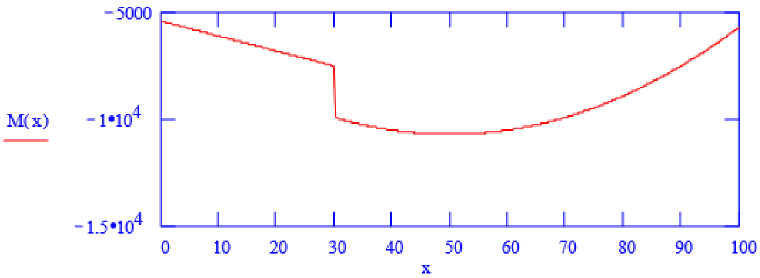
Calculul reactiunilor:		
Reactiunea V_1 : se stabilește din ecuația de momente față de punctul 2	*Reactiunea V_2* : se stabilește din ecuația de momente față de punctul 1	Verificarea reacțiunilor: valoarea următoarei expresii trebuie să fie 0
$V_1 := \frac{M}{l}$	$V_2 := \frac{-M}{l}$	$V_1 + V_2 =$
$V_1 = 0$	$V_2 =$	

Trasarea diagramelor de forțe și momente.
Diagrama de forțe tăietoare: se definește o funcție T(x)

<table>
<tr><td>$T(x) := V_1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diagrama de momente încovoietoare: se definește o funcție M(x)</td></tr>
<tr><td>$M(x) := \begin{cases} -V_1\cdot x & \text{if } x\le a \\ -V_1\cdot x + M & \text{otherwise} \end{cases}$</td><td>
</td></tr>
</table>

Aplicația 3 Bară încastrată cu încărcare complexă

<table>
<tr><td colspan="6">
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Definirea variabilelor inițiale:</td></tr>
<tr><td>Lungimea barei [mm]</td><td>Cota a [mm]</td><td>Cota b [mm]</td><td>Cota c [mm]</td><td>Forta concentrată [kN]</td><td>Forța concentrată [kN/mm]</td></tr>
<tr><td>$l := 100$</td><td>$a := 30$</td><td>$b := 40$</td><td>$c := l - a - b$</td><td>$F := 10$</td><td>$Q := 2$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Calculul reactiunilor:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Reactiunea V_1 : se stabilește din ecuația de echilibru pe verticală</td><td colspan="3">Reactiunea M : se stabilește din ecuația de momente față de punctul 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">$V := F + c\cdot Q$
$V = 5.4\cdot 10^3$</td><td colspan="3">$M := F\cdot a + \left[(Q\cdot c)\cdot\left(a + b + \frac{c}{2}\right)\right] \quad M =$</td></tr>
</table>

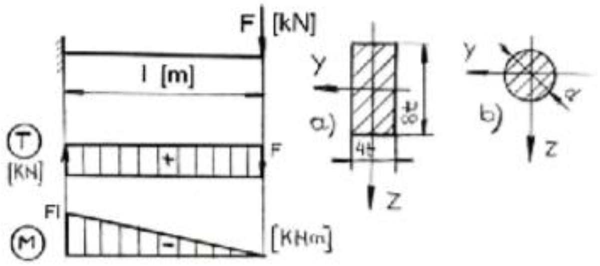
<table>
<tr><td colspan="2">Trasarea diagramelor de forțe și momente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diagrama de forțe tăietoare: se definește o funcție T(x)</td></tr>
<tr><td>$$T(x) := \left| \begin{array}{l} V \ \text{ if } x \le a \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} V - F \ \text{ if } a < x \le b \\ V - F - Q\cdot(x - a - b) \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right.$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diagrama de momente încovoietoare: se definește o funcție M(x)</td></tr>
<tr><td>$$M(x) := \left| \begin{array}{l} -M - V\cdot x \ \text{ if } x \le a \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} -M - V\cdot x + F\cdot(x - a) \ \text{ if } a > x \le b \\ (-M - V\cdot x) + F\cdot(x - a) + (Q\cdot(x - a - b))\cdot(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$</td><td>
</td></tr>
</table>

LABORATOR 5

Dimensionarea barelor drepte

Aplicația 1

Să se dimensioneze bara din figura de mai jos, în ipoteza ca secțiunea transversală are două forme posibile: dreptunghiulară și rotundă.



Definirea variabilelor inițiale:		
Forța [kN]	Lungimea [mm]	Rezistența admisibilă
$F := 0.5 + 0.1 \cdot n$	$l := 0.45 + 0.2 \cdot n$	$\sigma_a := 140 \cdot 10^6$

Să se calculeze momentul maxim din bară [Nm]	Să se calculeze modulul de rezistență necesar [m^3]
$M_{max} := F \cdot l \cdot 10^3$	$W_{ynec} := \dfrac{M_{max}}{\sigma_a}$
$M_{max} = 5.49 \cdot 10^3$	$W_{ynec} = 3.921 \cdot 10^{-5}$

1.1.Varianta cu secțiune pătrată

Să se calculeze modulul real al barei pentru: h=8xt și b=4xt	
$W_y = b \cdot \dfrac{h^2}{6} = 4 \cdot 64 \cdot \dfrac{t^3}{6}$	
Să se calculeze valoarea parametrului t	
$t_{min} := \sqrt[3]{6 \cdot \dfrac{W_{ynec}}{4 \cdot 64}}$ $t_{min} = 9.723 \cdot 10^{-3}$	$t_{mm} := t_{min} \cdot 10^3$ $t_{mm} = 9.723$
Se adoptă valoarea parametrului *t* folosind funcția de rotunjire superioară ***ceil***	
$t := \text{ceil}(t_{mm})$	$t = 10$

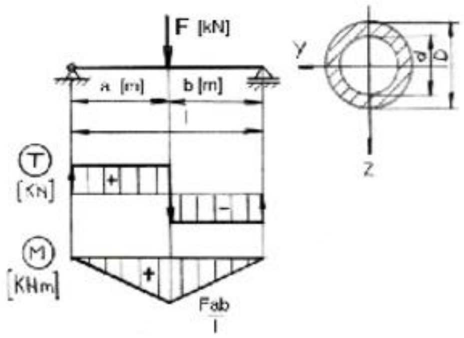
Se calculează dimensiunile secțiunii:	
$b := 4 \cdot t \qquad b = 40$	$h := 8 \cdot t \qquad h = 80$

1.2.Varianta cu secțiune rotundă

$W_y = \pi \cdot \frac{d^3}{32}$	
Să se calculeze valoarea parametrului d	
$d_{min} := 10^3 \cdot \sqrt[3]{32 \cdot \frac{W_{ynec}}{\pi}}$	$d_{min} = 73.646$
Se adoptă valoarea parametrului *t* folosind funcția de rotunjire superioară ***ceil***	
$d := \mathrm{ceil}(d_{min}) \qquad d = 74$	

Aplicația 2

Să se dimensioneze bara din figura de mai jos.



Definirea variabilelor inițiale:	
$F_1 := 19 + 0.8 \cdot n$; $a_1 := 0.5 + 0.2 \cdot n$; $b_1 := 0.4 + 0.3 \cdot n$; $\sigma_a := 140 \cdot 10^6$; $\alpha := 0.7 \qquad \alpha = \frac{d}{D}$	
Se calculează momentul maxim pe bară:	
$M_{max1} := F_1 \cdot a_1 \cdot \frac{b_1}{a_1 + b_1}$	$M_{max1} = 52.96$
Se calculează modul de rezistență necesar:	
$W_y = \pi \cdot \frac{D^3}{32} \left(1 - \alpha^4\right)$	$D_{min1} := 1000 \cdot \sqrt[3]{\frac{W_{ynec1}}{0.0745}} \qquad D_{min1} = 17.188$
Se adoptă:	
$D_1 := \mathrm{ceil}(D_{min1}) \qquad D_1 = 18$	$d_1 := \mathrm{floor}(\alpha \cdot D_1) \qquad d_1 = 12$

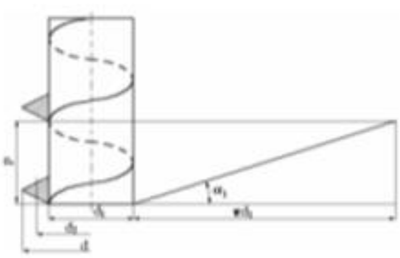
LABORATOR 6

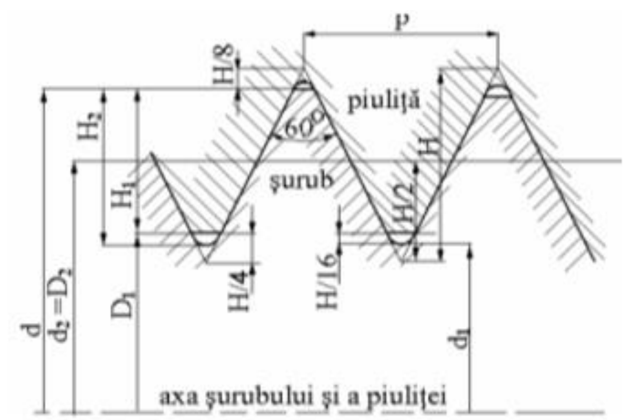
Asamblări filetate

Aplicația 1 Verificarea șuruburilor

Pentru a verifica un șurub trebuie să se țina seama de solicitările la care este acesta supus: tracțiunea tijei – sub acțiunea forțe de strângere și torsiunea tijei – datorită forțelor de frecare dintre spirele filetului. Se urmărește calcularea tensiunilor de tracțiune și torsiune, combinarea lor cu ajutorul unei dintre teoriile de echivalență și compararea rezultatului obținut cu ajutorul valorii tensiunii admisibile la tracțiune pentru materialul tijei șurubului

$F := 8000$	Forța de strângere
$d_1 := 10$	Diametrul interior al filetului
$d_2 := 11$	Diametrul mediu al filetului
$p := 1.5$	Pasul filetului
$\alpha_2 := \frac{p}{\pi \cdot d_1}$	Unghiul de înclinare a spirei filetului
$\mu_1 := 0.2$	Coeficientul de frecare dintre spirele filetului $\alpha_2 = 0{,}048$
$\mu_2 := 0.32$	Coeficientul de frecare dintre piuliță și suprafața de reazem
$\rho' := \operatorname{atan}(\mu_1)$	Unghiul de frecare $\rho = 0{,}197$
$c := 1.3$	Coeficientul de siguranță
$\sigma_{tl} := 260$	Tensiunea limită la tracțiune a materialului tijei

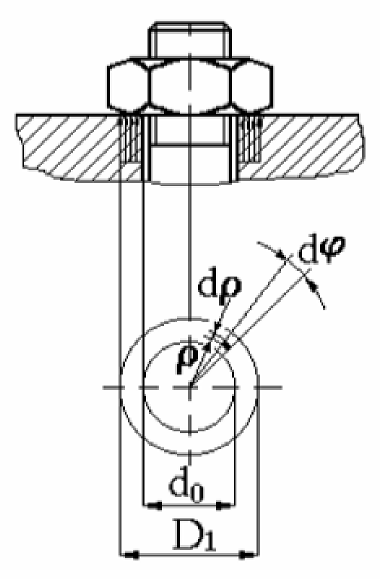


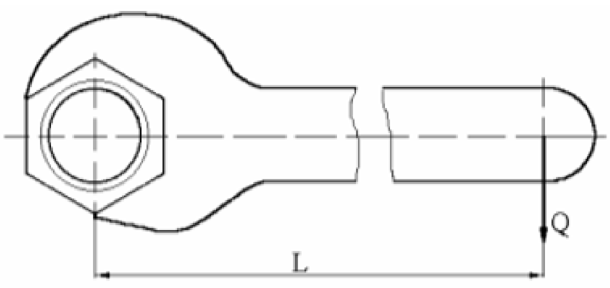


Calculul tensiunilor din tija filetată	
Tensiunea la tracțiune [N/mm^2]	$\sigma_t := \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_1^2}{4}}$ $\sigma_t = 101.859$
Tensiunea la torsiune [N/mm^2]	$\tau_t := \frac{F \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \tan(\alpha_2 + \rho')}{\frac{(\pi \cdot d_1^3)}{16}}$ $\tau_t = 56.061$
Tensiunea echivalentă [N/mm^2]	$\sigma_e := \sqrt{\sigma_t^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$ $\sigma_e = 140.726$
Verificarea la solicitare	
Rezultat 1 – condiție verificată, șurubul rezistă la solicitarea la care este supus	$\sigma_e < \frac{\sigma_{tl}}{c} = 1$
Rezultat 0 – condiție neverificată, șurubul nu rezistă la solicitarea la care este supus	

Aplicația 2 Determinarea forței de strângere la cheie

Forța de strângere la o asamblare filetată trebuie să învingă forțele de frecare ce apar între spirele filetului și între piuliță și suprafața de reazem. Valoare momentului de strângere generat trebuie să depășească suma momentelor M_1 și M_2.

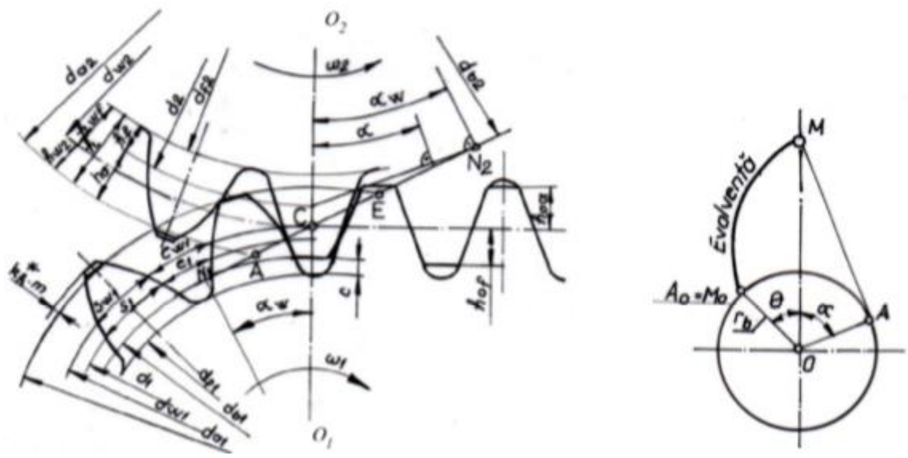


$D_1 := 40$	Diametrul exterior al suprafeței de contact dintre piuliță și suprafața de reazem
$d_0 := 20$	Diametrul interior al suprafeței de contact dintre piuliță și suprafața de reazem
$M_1 := \frac{F \cdot d_2 \cdot \tan(\alpha_2 + \rho')}{2}$ $M_1 = 1.101 \cdot 10^4$	Momentul de frecare între spirele filetului
$M_2 := \mu_2 \cdot F \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{D_1^3 - d_0^3}{D_1^2 - d_0^2}$ $M_2 = 3.982 \cdot 10^4$	Momentul de frecare între piuliță și suprafața de reazem
	
$L := 100$	Lungimea cheii
$Q := \frac{M_1 + M_2}{L}$ $Q = 508.299$	Forța de strângere necesară

LABORATOR 7

Elemente geometrice ale roților dințate cilindrice cu dinți drepți

La angrenajul evolventic cilindric exterior ca cel prezentat în figura de mai jos u profilele active (porţiunile din profilul dinţilor pe care are loc angrenarea) sunt evolvente normale ale cercului, iar linia de angrenare este dreapta care trece prin polul angrenării P şi este tangentă la cercurile de bază.



Evolventa normală a cercului prezentatî în partea dreaptă a figurii de mai sus, este curba descrisă de un punct My al dreptei (d) care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc – numit cerc de bază - de rază rb. În coordonate polare ecuaţiile evolventei sunt:

$$\theta = \mathrm{inv}\alpha = \mathrm{tg}\alpha - \alpha;\ r = \frac{P}{\pi} = \frac{d}{\cos\alpha};$$

Principalele elemente geometrice ale roților dințate sunt:

Numărul de dinți $z_{1,2}$ (număr natural)	
Modulul m [mm]	$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{z}$
Diametrul de divizare d [mm]	$d_{1,2} = m \cdot z_{1,2}$
Pasul pe cercul de divizare p [mm]	$p = \frac{\pi \cdot d}{z} = \pi \cdot m$
Diametrul de bază $d_{b1,2}$ [mm]	$d_{b1,2} = d_{1,2} \cdot \cos\alpha_0$
Înălțimea de referință a capului dintelui h_a [mm]	$h_a = h_{0a}^{*}$ unde $h_{0a}^{*} = 1$

Înălțimea de referință a piciorului dintelui h_f [mm]	$h_f = h^*_{0f} \cdot m$ unde $h^*_{0f} = 1{,}25$
Înălțimea de referință a dintelui h [mm]	$h_a = h_a + h_f = (h^*_{0a} + h^*_{0f}) \cdot m$
Jocul la capul dintelui c [mm]	$c = c^*_0 \cdot m$ unde $h^*_{0f} = 0{,}25$
Coeficientul deplasării de profil $x_{1,2}$	
Înălțimea capului dintelui h_a [mm]	$h_{a1,2} = (h^*_{0a} + x_{1,2}) \cdot m$
Înălțimea piciorului dintelui h_f [mm]	$h_{f1,2} = (h^*_{0a} + c^*_0 - x_{1,2}) \cdot m$
Înălțimea dintelui h [mm]	$h_{1,2} = h = (2 \cdot h^*_{0a} + c^*_0) \cdot m$
Diametrul de rostogolire $d_{w1,2}$ [mm]	$d_{w1,2} = d_{1,2} + 2 \cdot m \cdot x_{1,2} = m \cdot (z_{1,2} + 2 \cdot x_{1,2})$
Diametrul de cap $d_{a1,2}$ [mm]	$d_{a1,2} = d_{1,2} + 2 \cdot h_{a1,2} = d_{1,2} + 2 \cdot (h^*_{0a} + x_{1,2}) \cdot m$
Diametrul de picior $d_{f1,2}$ [mm]	$d_{f1,2} = d_{1,2} + 2 \cdot h_{f1,2} = d_{1,2} - 2 \cdot (h^*_{0a} + c^*_0 - x_{1,2}) \cdot m$
Distanța între axe de referință a [mm]	$a = \frac{(z_1 + z_2) \cdot m}{2}$
Distanța între axe a_w [mm]	$a = \frac{d_{w1} + d_{w1}}{2}$
Coeficientul deplasărilor de profil însumate x_s	$x_s = x_1 + x_2$
Involuta unghiului α, inv_α	$inv\alpha = tg\alpha - \alpha = tg20^\circ - \frac{\pi 20^\circ}{180^\circ}$
Involuta unghiului de angrenare $inv\ \alpha_w$	$inv\alpha = inv\alpha + \frac{2 \cdot x_{s \cdot tg_\alpha}}{z_1 + z_2}$
Unghiul de angrenare α_w	$\alpha_w = \arccos\left(\frac{a}{a_w} \cos\alpha\right)$

Se urmărește determinarea elementelor geometrice ale unui angrenaj cilindric cu dinți drepți nedeplasat cu următoarele date inițiale:

Date de intrare pentru un număr de (minumum 17 dinți)

$z_1 := 10$	Condiția de verificare a numărului minim de dinți
$z_1 := \begin{cases} z_1 & \text{if } z_1 \geq 17 \\ 17 & \text{otherwise} \end{cases}$	
$i_{12} := 2$	Raportul de transmitere
$m_{STAS} := 2$	Modulul standardizat condorm STAS 822-82 [mm]

Date calculate

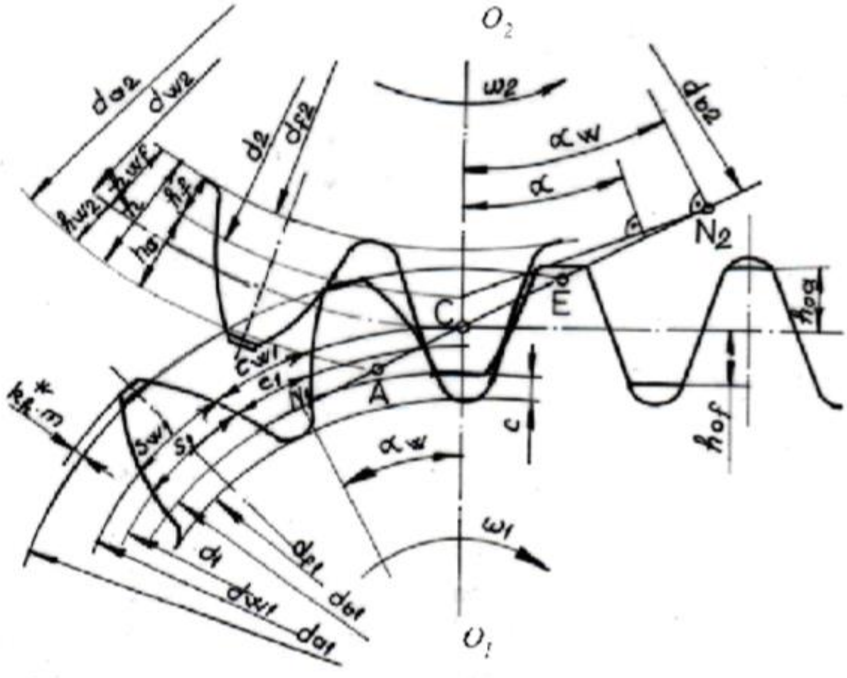
$z_2 := z_1 \cdot i_{12}$	Numărul de dinți al roții conduse
$d_1 := m_{STAS} \cdot z_1$	Diametrele de divizare
$d_2 := m_{STAS} \cdot z_2$	
$p := \pi \cdot m_{STAS}$	Pasul
$d_{b1} := d_1 \cdot \cos(20\ deg)$	Diametrul de bază
$d_{b2} := d_2 \cdot \cos(20\ deg)$	
$h_a := 1.00 \cdot m_{STAS}$	Înălțimi ale dinților
$h_f := 1.25 \cdot m_{STAS}$	
$h := h_a + h_f$	
$c := 0.25 \cdot m_{STAS}$	
$h_1 := 2.25 \cdot m_{STAS}$	
$h_2 := 2.25 \cdot m_{STAS}$	
$d_{w1} := d_1 + 2 \cdot m_{STAS}$	Diametre de rostogolire
$d_{w2} := d_2 + 2 \cdot m_{STAS}$	
$d_{a1} := d_1 + 2 \cdot m_{STAS}$	Diametre de cap

$d_{a2} := d_2 + 2 \cdot m_{STAS}$	
$d_{f1} := d_1 - 2 \cdot m_{STAS} \cdot 1.25$	Diametre de picior
$d_{f2} := d_2 - 2 \cdot m_{STAS} \cdot 1.25$	
$a := \frac{m_{STAS} \cdot (z_1 + z_2)}{2}$	Distanța dintre axe
$a_w := \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2}$	
$\alpha_w := \operatorname{acos}\left(a \cdot \frac{\cos(20\ deg)}{a_w}\right)$	
$inv\alpha_w := \tan(\alpha_w) - \alpha_w$	

Rezultate

$m_{STAS} = 2$	Modulul STAS [mm]
$d_1 = 34$	Diametrele de divizare [mm]
$d_2 = 68$	
$d_{b1} = 31.95$	Diametrul de bază [mm]
$d_{b2} := d_2 \cdot \cos(20\ deg)$	
$h = 4.5$	Înălțimea de referință a dintelui [mm]
$d_{w1} = 38$	Diametre de rostogolire [mm]
$d_{w2} = 72$	
$d_{a1} = 38$	Diametre de cap [mm]
$d_{a2} = 72$	
$d_{f1} = 29$	Diametre de picior [mm]
$d_{f2} = 63$	
$a = 51$	Distanța dintre axe de referință [mm]
$a_w = 55$	Disnatța reală dintre axe [mm]
$inv\alpha_w = 0.05$	[....] $\operatorname{tang}(\alpha_w) - \alpha_w$

$\alpha_w = 0.513$	Unghiul de angrenare [rad]



APLICAȚII INDIVIDUALE

1. Se dau punctele A(2q , 3-q,   3+q) , B(3q, 3+0.5q, 6-0.4q) şi C(3+0.2q, 6+0.2q, 3+0.3q)**.** Să se calculeze componentele vectorilor $\overline{F}_1$ $(|\overline{F}_1| = AB)$; $\overline{F}_2$ $(|\overline{F}_2| = AC)$

1. $F_{1x} = B_x - A_x = ...-.........=.......$ $\quad$ $F_{2x} = C_x - A_x = ...-.........=.......$
2. $F_{1y} = B_y - A_y = ...-.........=.......$ $\quad$ $F_{2y} = C_y - A_y = ...-.........=.......$
3. $F_{1z} = B_z - A_z = ...-.........=.......$ $\quad$ $F_{2z} = C_z - A_z = ...-.........=.......$

2. Se cunosc ecuaţiile vectoriale $\overline{F}_1$; $\overline{F}_2$

$$\overline{F}_1 = F_{1x}\cdot\overline{i} + F_{1y}\cdot\overline{j} + F_{1z}\cdot\overline{k} = 2q\cdot\overline{i} - 0,5q\cdot\overline{j} + 3,5q\cdot\overline{k}$$
$$\overline{F}_2 = F_{2x}\cdot\overline{i} + F_{2y}\cdot\overline{j} + F_{2z}\cdot\overline{k} = 1,5q\cdot\overline{i} + 5,3q\cdot\overline{j} - 2,9q\cdot\overline{k}$$

Să se determine vectorul $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$

$$\overline{F} = F_x\cdot\overline{i} + F_y\cdot\overline{j} + F_z\cdot\overline{k} = ...\cdot\overline{i} + ...\cdot\overline{j} + ...\cdot\overline{k}$$

Să se determine $|\overline{F}|$

$$|\overline{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{.....+.....+.....} = ...$$

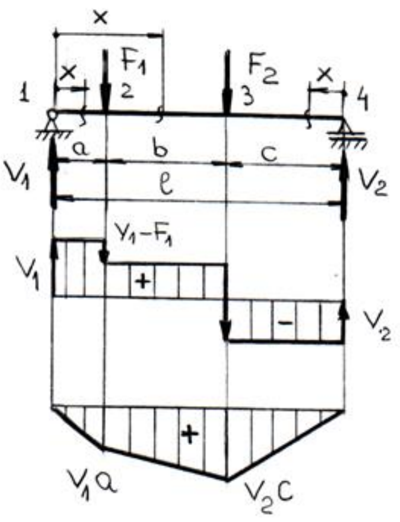
3. Să se calculeze reacţiunile pentru grinda din figura . Se calculează reacţiunile din ecuaţiile de echilibru, de momente în raport cu punctele fixe ale grinzii:

$\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow ,$ $\qquad$ $V_2 = ,$

$\sum M_{(4)} = 0 \Rightarrow ,$ $\qquad$ $V_1 = .$

Se verifică reacţiunile folosind ecuaţia de echilibru de proiecţie pe verticală:

$$V_1 + V_2 = F_1 + F_2 ;$$



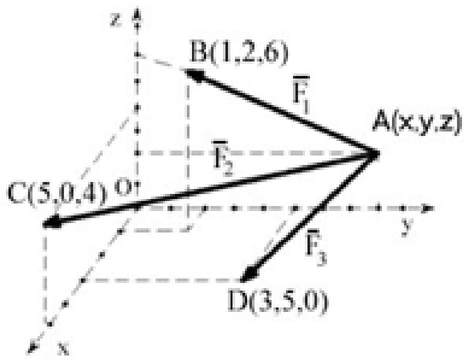
4. Să se scrie torsorul de reducere al forţelor $\overline{F_1}$; $\overline{F_2}$; $\overline{F_3}$ faţă de originea sistemului de axe de coordonate, (figura 2). Se scriu ecuaţiile vectoriale:

$\overline{F_1} = F_{1x} \cdot \overline{i} + F_{1y} \cdot \overline{j} + F_{1z} \cdot \overline{k} =$

$\overline{F_2} = F_{2x} \cdot \overline{i} + F_{2y} \cdot \overline{j} + F_{2z} \cdot \overline{k} =$ $\qquad$ $\overline{F_3} = F_{3x} \cdot \overline{i} + F_{3y} \cdot \overline{j} + F_{3z} \cdot \overline{k} =$

Torsorul de reducere în punctul O al sistemului de forţe $\overline{F_i}$:

$$\tau_O \begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{3} \overline{F_i} \\ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{3} \overline{r_i} \times \overline{F_i} \end{cases}$$



5. Se dau punctele A(2q , 3-q, 3+q) , B(3q, 3+0.5q, 6-0.4q) şi C(3+0.2q, 6+0.2q, 3+0.3q). Să se scrie ecuaţiile vectoriale $\overline{F_1}$; $\overline{F_2}$

$\overline{F_1} = F_{1x} \cdot \overline{i} + F_{1y} \cdot \overline{j} + F_{1z} \cdot \overline{k} = ...\cdot \overline{i} + ...\cdot \overline{j} + ...\cdot \overline{k}$

$\overline{F_2} = F_{2x} \cdot \overline{i} + F_{2y} \cdot \overline{j} + F_{2z} \cdot \overline{k} = ...\cdot \overline{i} + ...\cdot \overline{j} + ...\cdot \overline{k}$

6. Se cunosc ecuaţiile vectoriale $\overline{F_1}$; $\overline{F_2}$

$\overline{F_1} = F_{1x} \cdot \overline{i} + F_{1y} \cdot \overline{j} + F_{1z} \cdot \overline{k} = q \cdot \overline{i} - 3,5q \cdot \overline{j} + 1,5q \cdot \overline{k}$

$$\bar{F}_2 = F_{2x}\cdot\bar{i} + F_{2y}\cdot\bar{j} + F_{2z}\cdot\bar{k} = 3{,}5q\cdot\bar{i} + 3{,}3q\cdot\bar{j} - 3{,}9q\cdot\bar{k}$$

Să se calculeze produsul scalar $\bar{F}_1\cdot\bar{F}_2$

$$\bar{F}_1\cdot\bar{F}_2 = F_{1x}\cdot F_{2x} + F_{1y}\cdot F_{2y} + F_{1z}\cdot F_{2z} = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Să se calculeze şi să se reprezinte $\bar{M} = \bar{F}_1 x \bar{F}_2$

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots.\bar{i} + \ldots\ldots\bar{j} + \ldots\ldots\bar{k}$$

7. Să se reprezinte diagramele de eforturi sectionale pentru grinda din figura 3. Se calculează reacţiunile din ecuaţiile de echilibru de momente în raport cu punctele fixe ale grinzii:

$\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow ,$ $\quad V_2 = ,$

$\sum M_{(4)} = 0 \Rightarrow ,$ $\quad V_1 = .$

Se verifică reacţiunile folosind ecuaţia de echilibru de proiecţie pe verticală:

$$V_1 + V_2 = F_1 + F_2;$$