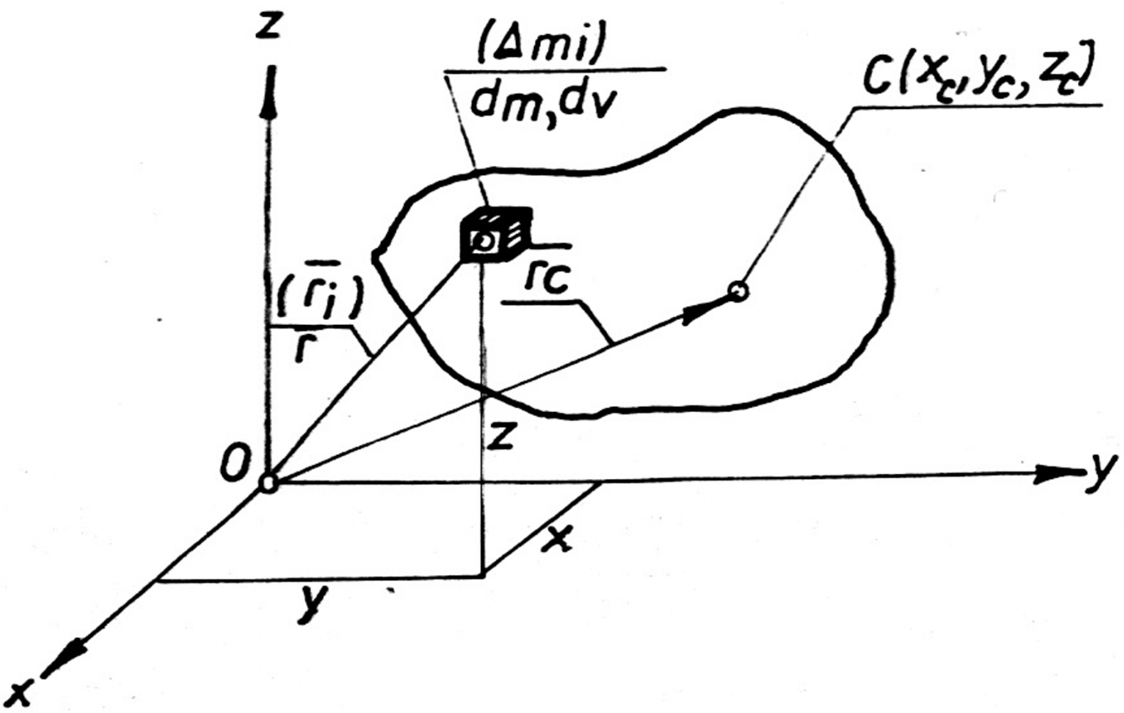
UNIVERSITATEA „DUNĂREA DE JOS”
GALAȚI

Geanina Marcela PODARU
Cristian MUNTENIȚĂ
Carmelia Mariana DRAGOMIR BĂLĂNICĂ

MECANICĂ I



NOTE DE CURS

EDITURA FUNDAȚIEI UNIVERSITARE
„Dunărea de Jos” Galați - 2020
ISBN 978-973-627-629-3

UNIVERSITATEA DUNĂREA DE JOS GALAȚI

Editura Fundaţiei Universitare „Dunărea de Jos”
din Galaţi

este acreditată de CNCSIS

Referent științific: Conf. dr. ing. Sorin CIORTAN

Director, prof. dr. emerit Cosma Tudose

www.editura.ugal.ro
editura@ugal.ro

ISBN 978-973-627-629-3

Cuvânt înainte

Lucrarea de față reprezintă prima parte a cursului de Mecanică. Disciplina abordează probleme de mecanică, rezistență materialelor și organe de mașini. În lucrarea de față sunt tratate probleme de: mecanică, cele de rezistența materialelor și cele de organe de mașini să fie abordate în cea de-a doua parte a cursului Mecanica II.

Problemele expuse sunt tratate într-o formă concisă, deoarece se adresează unor studenți care sunt obligați să audieze cursurile. Autorul a căutat să trateze toate problemele în așa fel încat să nu fie necesară cunoașterea din partea studentului a unui aparat matematic prea vast. Cursul astfel redactat, ținand cont de faptul că este vorba de studenții anului I, presupune cunoașterea elementelor de bază ale calculului diferențial și integral. Studiind manualele de fizică și mecanică, clasele IX-XII ale liceelor, și observând că la acest nivel multe probleme ale mecanicii sunt tratate vectorial, autorul și-a permis discutarea problemelor de mecanică bazându-se aproape exclusiv pe calculul vectorial.

Împărțirea Mecanicii în subcapitole s-a făcut într-un mod care să țină cont de realitate. S-a căutat fenomenele să fie prezentate întotdeauna în ansamblul lor complet evitând separarea în studiul cinematicii și studiul dinamicii a unui fenomen. În general, mecanica cuprinde două capitole mari: Mecanica punctului material și mecanica sistemelor de puncte materiale, unde desigur se include și mecanica solidelor. În majoritatea cazurilor, cursul de mecanică se împarte în trei capitole mari: Statică, Cinematică și Dinamică.

Redactarea cursului s-a făcut ținând cont de bagajul de cunoștințe pe care trebuie să-l aibă studentul în urma absolvirii liceului, abordând unele probleme direct, presupunând noțiunile elementare ca fiind cunoscute. Prezentul curs redactat sub forma prezentă, nu scutește pe student să audieze prelegerile în mod conștiincios și să-și noteze amănuntele legate de problemele audiate, deoarece cursul de față este doar un fir conducător în unele cazuri sau conține amănunte față de prelegeri în altele, dând posibilitatea studentului să-și aprofundeze problemele prin studiu individual.

În cadrul cursului redactat, autorul nu s-a limitat strict la programa analitică, făcând loc și unor probleme de mare actualitate - cum ar fi spre exemplu zborul cosmic. Consider că fără aceste paragrafe cursul ar fi pierdut din integritate.

Autorii,

CUPRINS

Cuvând înainte

Capitolul 1 SISTEMUL INTERNAȚIONAL DE UNITĂȚI 5

1.1. Măsurarea mărimilor mecanice 5
1.2. Sistemul internațional de unități 6
1.3. Multipli și submultipli ai unităților 7
1.4. Ecuații dimensionale 7

Capitolul 2 ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL 9
2.1. Algebră vectorială 9
2.1.1. Noțiunea de vector 9
2.1.2. Componentele unui vector 10
2.1.3. Adunarea vectorilor 12
2.1.4. Produsul scalar sau produsul interior al doi vectori 14
2.1.5. Produsul scalar sau produsul exterior al doi vectori 15
2.1.6. Produse duble 17
2.1.6.1. Dublu produs scalar 17
2.1.6.2. Produsul mixt 17
2.1.6.3. Dublu produs vectorial 18
2.1.7. Derivata unui vector depinzând de un parametru 19

Capitolul 3 MECANICA PUNCTULUI MATERIAL 20
3.1. Elementele cinematicii punctului material 20
3.1.1. Noțiuni cinematice de bază. Viteză, accelerație 20
3.1.2. Viteza și accelerația în diferite sisteme de coordonate 22
3.1.2.1. Coordonate carteziene 22
3.1.2.2. Coordonate naturale 23
3.1.2.3. Coordonate polare plane 24
3.1.2.4. Coordonate polare cilindrice 24
3.1.2.5. Coordonate sferice (polare spațiale) 25
3.1.3. Probleme simple de cinematică 26
3.1.3.1. Mișcarea circulară uniformă 26
3.1.3.2. Mișcarea rectilinie uniformă 28
3.1.3.3. Mișcarea uniformă variată 30
3.1.4. Oscilații armonice. Suprapunerea (compunerea) ascilațiilor 31
3.1.4.1. Oscilații armonice 31
3.1.4.2. Suprapunerea oscilațiilor 33
3.2. Problemele generale ale dinamicii punctului material 39

3.2.1. Legile fundamentale ale mecanicii. Axiomele lui Newton 39
3.2.1.1. Principiul inerției 39
3.2.1.2. Ecuația fundamentală a dinamicii. Forța și masa 41
3.2.1.3. Principiul acțiunii și reacțiunii 44
3.2.1.4. Principiul independenței acțiunii forțelor 44
3.2.2. Ecuațiile de mișcare ale punctului material 45
3.2.2.1. Lucru mecanic. Energie cinetică 46
3.2.2.2. Randamentul mecanic 50
3.2.3. Forțe centrale. Teorema ariilor. 56
3.2.3.1. Forțe centrale 56
3.2.3.2. Teorema ariilor 58
3.2.4. Punct material supus la legături. Despre frecare. 59
3.2.4.1. Forțe de legătură 61
3.2.4.2. Considerații geometrice 65
3.2.5. Echilibrul punctului material 66
3.2.5.1. Echilibrul punctului material liber supus la acțiunea unui sistem de forțe concurente. 66
3.2.5.2. Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare 68
3.2.5.3. Echilibrul cu frecare al unui punct material 69
3.2.5.4. Echilibrul punctului material exprimat cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual 70
3.3. Probleme speciale în cadrul dinamicii punctului material 71
3.3.1. Mișcarea rectilinie. Căderea de la mare înălțime 71
3.3.1.1. Mișcarea rectilinie 71
3.3.1.2. Căderea de la mare înălțime 72
3.3.2. Oscilațiile armonice 74
3.3.3. Oscilațiile amortizate 76
3.3.4. Oscilațiile forțate. Rezonanță 81
3.3.5. Mișcarea în câmp gravitației universale 85
3.3.5.1. Timpul de revoluție 89
3.3.5.2. Ecuația energiei totale 90
3.3.6. Mișcarea pe Pământ. Căderea liberă 90
3.3.6.1. Mișcarea pe orizontală 94
3.3.7. Principiul lui D'Alembert. Legătura între dinamică și statică 95
3.3.7.1. Mișcarea curbilinie 97
3.3.8. Ecuația fundamentală a dinamicii în sistemul de referință mobil 99
3.3.8.1. Vectorul viteză unghiulară 100
3.3.8.2. Cinematica mișcării relative 101
3.3.8.3. Vitezele în mișcarea relativă 105
3.3.8.4. Accelerațiile în mișcarea relativă 106
3.3.8.5. Ecuația fundamentală a dinamicii 107

BIBLIOGRAFIE 109

CAPITOLUL 1
SISTEMUL INTERNAȚIONAL DE UNITĂȚI

1.1. Măsurarea mărimilor mecanice

Mecanica studiază fenomenele, utilizând anumite mărimi legate între ele prin relații matematie, care reflectă legile după care se produc aceste fenomene. Asemenea mărimi sunt: lungimea, masa, timpul, viteza, accelerația, forța, lucrul mecanic, etc. Principala caracteristică a unei mărimi mecanice (fizice) este aceea că poate fi mărurată. Pentru a măsura o mărime mecanică , trebuie să o comparăm cu o mărime de aceeași natură, luată ca unitate. Raportul dintre mărimea de măsurat și unitatea de măsură utilizată reprezintă valoarea numerică a mărimii. Atfel mărimea A, a cărei unitate de măsură o notăm cu [A] și se poate determina astfel:

$$a = \frac{A}{[A]}$$

Legile mecanice cantitative se exprimă prin relații matematice. Formulele matematice sunt relații între mărimi, în timp ce formulele mecanice sunt relații între valori măsurate ale mărimilor. Pentru ca o formulă mecanică să fie identică cu formula matematică, unitățile în care măsurăm mărimile mecanice nu trebuie alese arbitrar cu într-o anumită dependenă unele de altele.

Faptul că între diferite mărimi mecanice există relații de interdependență, be oferă posibilitatea ca un număr mic de unități alese în mod arbitrar să permită determinarea tuturor celorlalte unități în mod nearbitrar. Un asemenea sistem de unități constituie un sistem coerent de unități.

1.2. Sistemul internațional de unități

Străduințele pentru găsirea unui sistem de unități absolut, coerent, extensibil și practic au condus în ultima perioadă la următoarele sisteme absolute și coerente.

Sistemul mecanic M.K_f.S, bazat pe metru, kilogram-forță, secundă. Unitatea de forță este variabilă cu latitudinea și altitudinea. Nu poate fi extins în electromagnetism, coerent cu unitățile practice electrice. Este folosit în ramurile mecanice ale tehnicii.

Sistemul C.G.S, bazat pe centimetru, gram și secundă. Permite extinderea, dar nu conduce la unități practice. Este adoptat și folosit pentru cercetări științifice.

Sistemul M.T.S, bazat pe metru, tonă, secundă. Are unități prea mari de masă și forță. Este extensibil, dar nu este coerent cu unități practice electrice.

Sistemul M.K.S, bazat pe metru, kilogram, secundă. Are unități practice geometrice și mecanice (în afară de unitățile de forță ți presiune, cam mici). Se extinde în electromagnetism, în mod coerent cu toate unitățile practice. Se suprapune de fapt, cu sistemul metric, în studiul său actual de dezvoltare (S.I.).

Sistemul metric (sistemul internațional de unități). Sistemul s-a dezvoltat succesiv începând din 1987. (Convenția Diplomatică a Metrului de la paris). În 1948 a fost denumit sistem practic de unități, iar în 1954 are adoptate șase unități fundamentale: METRU, KILOGRAM, SECUNDA, AMPER, gradul KELVIN și CANDELA (tabelul 1).

Mărimea	**Unitatea**	**Alegerea unității**
Lungimea	metru [m]	Lungimea unei bare etalon
Masa	kilogram [Kg]	Masa unui corp etalon
Timpul	secunda [s]	Durata unui fenomen periodic natural
Curent electric	amper [A]	Curentul produs prin trecerea unui anumit număr de electroni printr-un conductor într-o secundă
Temperatura	kelvin [K]	A suta parte din intervalul de temperatură între punctul de topire a gheții și punctul de fierbere a apei, la presiunea atmosferică normală
Intensitatea luminoasă	candela [cd]	Intensitatea luminoasă a unui corp incandescent, convețional ales, la temperatura sa de topire
Unghiul plan	radian [rad.]	Unghiul plan ales convențional
Unghiul solid	steradian [sr.]	Unghiul solid ales convențional

În sistemul S.I. aceste mărimi fundamentale au fost alese în mod arbitrar. Toate celelalte mărimi sunt mărimi derivate, deoarece sunt legate de unitățile fundamentale prin anumite relații denumite ecuații de definiție.

Facem observația că aceste unități fundamentale au definiții metrologice foarte precise, noi însă nu redăm aceste definiții în cadrul acestui curs.

1.3. Multipli și submultipli ai unităților

Unitățile fundamentale sau cele derivate folosite în diferitele domenii ale fizicii sunt uneori prea mici alteori prea mari. De aceea se folosesc multiplii sau submultiplii a căror nume se formează cu ajutorul prefixelor (tabelul 2).

Prefixul	**Simbol**	**Factorul**	**Prefixul**	**Simbol**	**Factorul**
tera	T	10^{12}	centi	c	10^{-2}
giga	G	10^{9}	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^{6}	micro	µ	10^{-6}
kilo	k	10^{3}	nano	n	10^{-9}
hecto	h	10^{2}	pico	p	10^{-12}
deca	da	10	femto	f	10^{-15}
deci	d	10^{-1}	atto	a	10^{-18}

1.4. Ecuțiile dimensionale

Unitățile mărimilor derivate sunt legate de unitățile fundamentale prin ecuații dimensionale. Notând cu [A] unitatea mărimii derivate A, ecuația dimensională a acestei mărimi va fi de forma:

$$[A] = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma}$$

unde: L, M, T sunt unități de lungime, masă și timp

α, β, γ sunt dimensiunile unității derivate în raport cu unitățile fundamentale

Ecuația dimensională a unei mărimi derivate se stabilește plecând de la ecuația de definiție a vitezei, care se calculează cu ajutorul următoarel formule:

$$v = \frac{S}{t}$$

unde: S - spațiul

t - timpul

Spunem că viteza are dimensiunea: 1 - față de lungime; 2- față de masă și -1 - față de timp. Menționăm că în formulele dimensionale nu apar coeficienți numerici deoarece au dimensiunea zero față de toate unitățile fundamentale. De aceea mărimile care se definesc cu raportul a două mărimi de aceeași natură, (densitate relativă, coeficient de frecare prin alunecare, etc.) sunt mărimi adimensionale. Ele au aceeași valoare în toate sistemele de unități și se exprimă numai printr-un singur număr ca de exmplu: constanta cercului $\pi = 3{,}142$.

Capitolul 2

ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL

2.1. Algebră vectorială

2.1.1. Noțiunea de vector

Mărimile care pot fi definite prin câte un număr și unitatea de măsură aleasă, sunt mărimi

scalare. Există însă mărimi ce prezintă un caracter geometric. Spunând de exemplu că punctul P (corp punctiform) s-a deplasat pe o dreaptă cu o 0,2m, noua poziție P' a punctului se va cunoasște complet numai facă se specifică direcția dreptei și sensul de deplasare a punctului pe această dreaptă.

În exemplul de mai sus, deplasarea punctului P poate fi caracterizată prin segmentul orientat PP'. Două deplasări PP' și PA ale punctului pot fi compuse într-o asigură deplasare PC, care este independentă de ordinea deplasărilor PP' și PA. Deplasarea rezultată PC, se obține construind paralelogramul ca în figura 2.1.

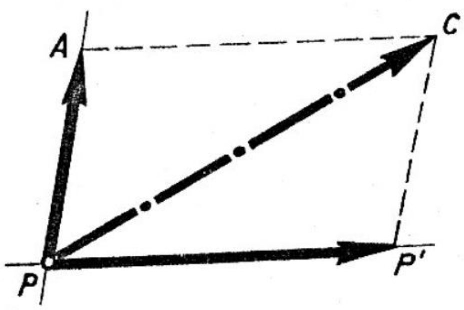


Figura 2.1.

Mărimile, pentru a căror caracterizare completă este necesară specificarea direcției și sensului, și se compus după legea paralelogramului sunt mărimi vectoriale. Un criteriu mai general pentru caracterizarea unui vector, vom da mai târziu, însă, și din cele sde mai sus putem trage concluzia că mărimile care pot fi caracterizate prin segmente orientate însă nu se însumează după legea paralelogramului, nu sunt mărimi vectoriale.

Vectorul A va fi reprezentat printr-un segment orientat (o săgeată) și va fi notat cu $\bar{A}$. Valoarea absolută sau modulul vectorului se va nota cu $|\bar{A}|$, pe când distanța A efectivă cu semnul + sau – și reprezintă valoarea scalară vectorului $\bar{A}$.

Doi vectori sunt egali $\overline{A} = \overline{B}$, dacă au aceeași mărime, aceeași direcție și același sens, adică vectorul $\overline{B}$ prin translație se suprapune $\overline{A}$. din diferența de mai sus rezultă că în privința egalității a doi vectori, poziția punctelor lor de aplicație este indiferentă. Din punctul de vedere al efectului fizic însă, poziția punctului de aplicație poate fi importantă. Astfel, în funcție de faptul că mutarea punctului de aplicație a vectorului modifică sau nu fenomenul fizic, vom distruge vectori liberi, și vectori legați.

2.1.2. Componentele unui vector

Dacă $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{u_3}$, sunt trei vectori unitari aplicați în punctul 0 ca în figura 2.2., atunci orice vector $\overline{A}$ în spațiul eucledian tridimensional poate fi obținut din componentele sale pe direcție versorilor $\overline{A} = A_1\overline{u_1}+A_1\overline{u_2}+A_1\overline{u_3}$.

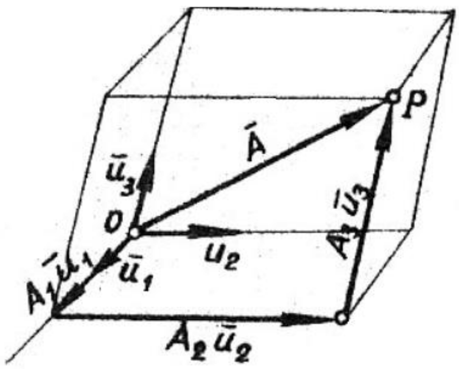


Figura 2.2.

Fie cazul special a trei vectori perpendiculari, $\overline{I}$, $\overline{J}, \overline{k}$, după sistemul ortogonal drept, ca în figura 2.3.

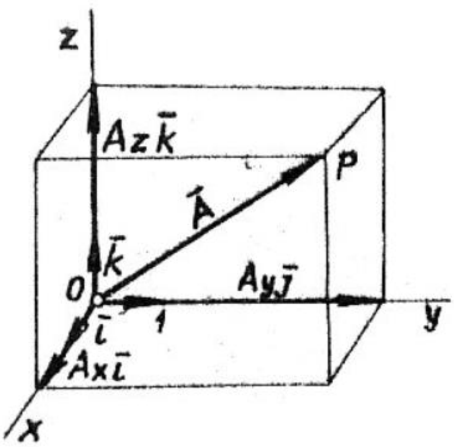


Figura 2.3.

Conform celor de mai sus, orice vector, poate fi ca sumă a componentelor sale pe cele trei axe (caracter hipercomplex). În ceea ce privește mărimile vectoriale, ele sunt: forțe, viteze, impulsuri, etc. Vectorul având caracter de lungime, care arată poziția unui punct P(x, y, z) față de reper), de obicei este vectorul notat cu $\bar{r}$, numit vector de poziție:

$$\bar{r} = x\bar{I} + y\bar{J} + z\bar{k}$$

Dacă vectorul $\bar{A}$ este dat, adică se cunosc:
din relația de mai sus, rezultă principiul lucrului mecanic vitual:'or exterioare pentru orice deplasare virtuală este nul.

Se poate spune deci că, dacă $\bar{R}\ \delta\bar{r} = 0$, echilibrul există.

Analitic :

$$X\ \delta x + Y\ \delta y + Z\ \delta z = 0$$

După cum se vede forțele de legătură în definiția principiului nu figurează. Condiția de mai sus este necesară dar și suficientă pentru ca punctul material să fie în echilibru. Principiul are aplicabilitate atât în cazul unei suprafețe sau curbe fixe cât și în cazul unei suprafețe sau curbe mobile deoarece în timpul δt = 0 deplasarea acestora este nulă, și în acest ultim caz deplasarea virtuală $\delta\bar{r}$ este de-a lungul suprafeței (sau curbei), figura 2.4.

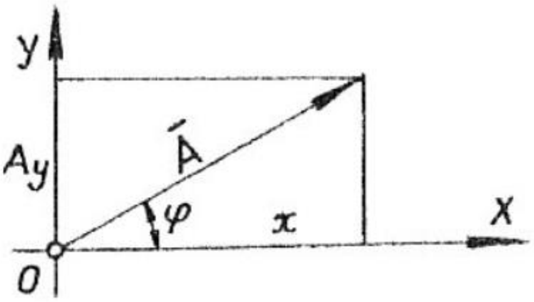


Figura 2.4.

Întrucât vectorul A în spațiul tridimensional este determinat de proiecțiile sale pe cele trei axe; Ax, Ay, Az; ecuația vectorială: $\overline{A} = \overline{B}$

Se poate scrie in trei ecuații scalare,

Ax = Bx; Ay = By; Az = Bz,

Deci orice ecuație vectorială este echivalentă cu trei ecuații scalare.

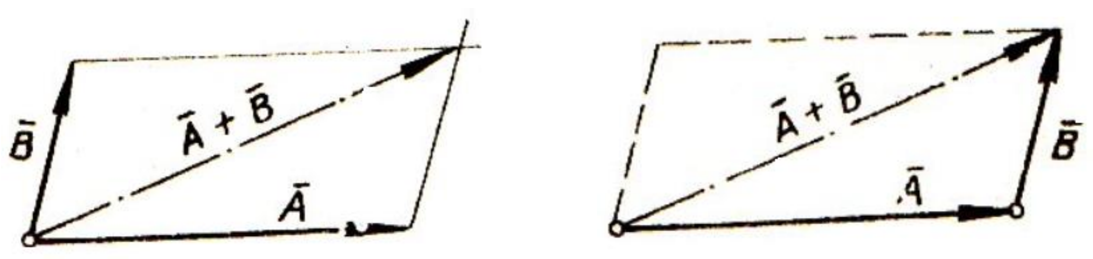
Deoarece componentele unui vector după cele trei axe se obțin din proiecțiile vectorului pe axe, rezultă că suma $\overline{A} + \overline{B}$ este suma componentelor vectorilor $\overline{A}$ și $\overline{B}$. Exemplul după axa OX este (Ax + Bx) $\bar{\imath}$;

Întrucât vectorul $\overline{A}$ este definit de componentele sale pe cele trei axe, se poate scrie symbolic, ca și in cazul definirii prin (a,b) a numărului complex a + i b ,

$$\overline{A} = (Ax, Ay, Az)$$

2.1.3. Adunarea vectorilor

Suma vectorilor $\overline{A}$ și $\overline{B}$, deci $\overline{A} + \overline{B}$ se obține construind paralelogramul din figura 2.5. a sau mai simplu, plasând vectorul $\overline{B}$ cu punctul său de aplicație în vârful vectorului $\overline{A}$. Vectorul sumă $\overline{A} + \overline{B}$ se obține legând punctul de aplicație al vectorului $\overline{A}$ cu vârful vectorului $\overline{B}$, ca în figura 2.5.b.



a) **b)**

Figura 2.5.

În același mod ca mai sus, la vectorul $\overline{A}+\overline{B}$ se poate aduna un $\overline{C}$, etc. Este ușor de observat că: adunarea vectorilă este comutativă $\overline{A}+\overline{B}=\overline{B}+\overline{A}$ și că este asociativă $(\overline{A}+\overline{B})+\overline{C}=\overline{C}+(\overline{B}+\overline{C})=\overline{B}+(\overline{A}+\overline{C})$ ceea ce rezultă clar din figura 2.6.

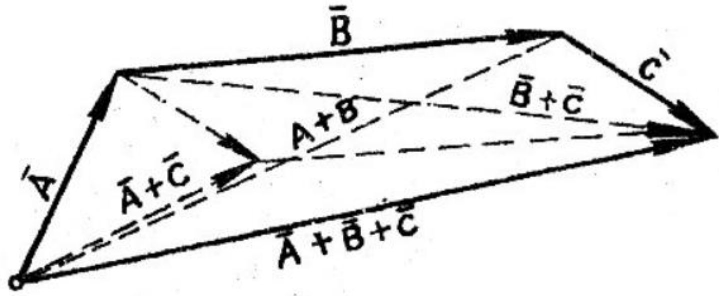


Figura 2.6.

Se înțelege prin negativul vectorului $\overline{B}$ un vector $-\overline{B}$ egal cu vectorul $\overline{B}$, având aceeași direcție dar sensul opus. Astfel diferența dintre vectorii $\overline{A}$ și $\overline{B}$,poate fi scrisă sub forma: $\overline{A}-\overline{B}=\overline{A}+(-\overline{B})$ și reprezintată în figura 2.7.

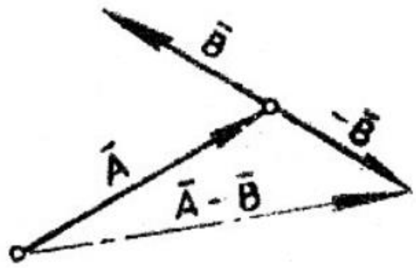


Figura 2.7.

Din definiție însumării vectorilor rezultă că, dacă $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \cdots = 0$, vectorii formează un poligon închis. Vectorul $\overline{A}$ înmulțit cu un scalar m (amplificat cu m) va fi vectorul $m\overline{A}$ având valoarea absolută $|m\overline{A}|$, direcția vectorială $\overline{A}$ și același sens, sau sens contrar lui $\overline{A}$, depinzând de semnul scalarului m.

Orice vector egal cu unitatea (l) este un vector unitar, sau versor. Vectorul unitar pe direcția vectorului $\overline{A}$ este, $\overline{u} = \frac{\overline{A}}{A}$ astfel $\overline{A} = A \cdot \overline{u}$.

2.1.4. Produs scalar sau produsul interior a doi vectori

Înțelegem prin $\overline{A}$ $\overline{B}$ produsul între scalariile vectorilor $\overline{A}$ și $\overline{B}$ și cosinusul unghiului dintre acești vectori, adică:

$$\overline{A}\,\overline{B} = A\,B \cos(\overline{A}\hat{,}\overline{B})$$

și este o mărime scalară. Se poate interpreta produsul scalar ca fiind scalarul A înmulțit cu proiecția lui $\overline{B}$ pe direcția vectorului $\overline{A}$ (sau invers). Se mai folosesc notațiile: $\overline{A}\overline{B}$, $(\overline{A}\,\overline{B})$,
$(\overline{A}, \overline{B})$;

Produsul scalar este: a) comutativ, $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{B}\,\overline{A}$ și b) distributive, $\overline{A}\,(\overline{B} + \overline{C}) = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$, figura 2.8.

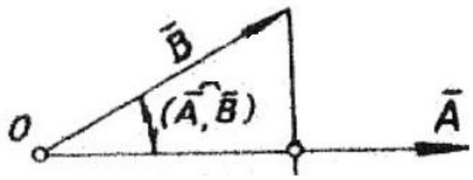


Figura 2.8.

deoarece conform figurii 2.9. avem:

$\overline{A}\,(\overline{B} + \overline{C}) = \overline{OA}\cdot\overline{OC} = \overline{OA}\,(\overline{OB} + \overline{BC}) = \overline{OA}\ \ \overline{OB} + \overline{CA} = \overline{AB} + \overline{AC}$

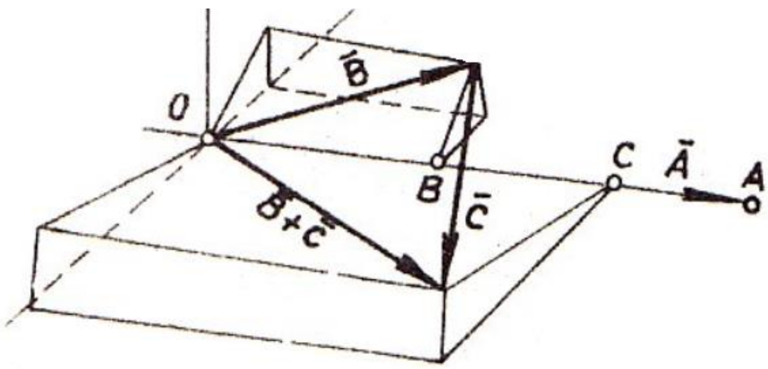


Figura 2.9.

Produsul scalar $\bar{A}\bar{B}$ este pozitiv sau negativ după cum cei doi vectori formează unghi ascuțit sau obtuz. În afară de cazurile banale A = 0 sau B = 0, produsul este nul dacă cos $\alpha = 0$.

Se recunoaște că $\bar{A}\,\bar{A} = \bar{A}^2 = A^2$ și deci pentru versorii axelor sistemului rectangular $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ vom avea aplicând distributivitatea:

$$\bar{A}\,\bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

2.1.5. Produs vectorial sau produsul exterior a doi vectori

Înțelegem prin produsul vectorial al vectorilor $\bar{A}$ și $\bar{B}$, vectorul al cărui modul este aria paralelogramului format cu cei doi vectori. Fiind un vector perpendicular pe planul format de $\bar{A}$ și $\bar{B}$, sensul fiind dat de legea șurubului drept (rotind primul factor $\bar{A}$ sub unghiul mai mic spre cel de al doilea factor $\bar{B}$, figura 2.10.)

Pentru produs vectorial se mai folosesc noțiunile: $[\bar{A}, \bar{B}]$ sau $\bar{A} \times \bar{B}$;

Conform definiției date, produsul vectorial a doi vectori nu este comutativ,

$$[\bar{A}\,\bar{B}] = -[\bar{B}\,\bar{A}]$$

dar este distributiv: $[(\bar{A} + \bar{B}), \bar{C}] = [\bar{A}\,\bar{C}] + [\bar{B}\,\bar{C}]$

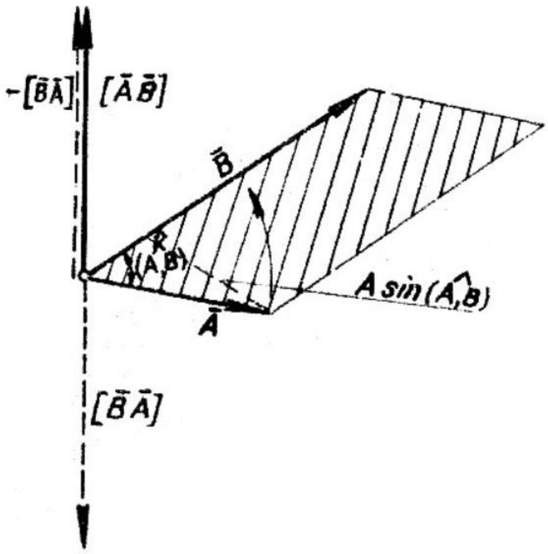


Figura 2.10.

Distributivitatea față de operația de adunare vectorială se poate vedea din figura 2.11. unde s-a procedat în felul următor:

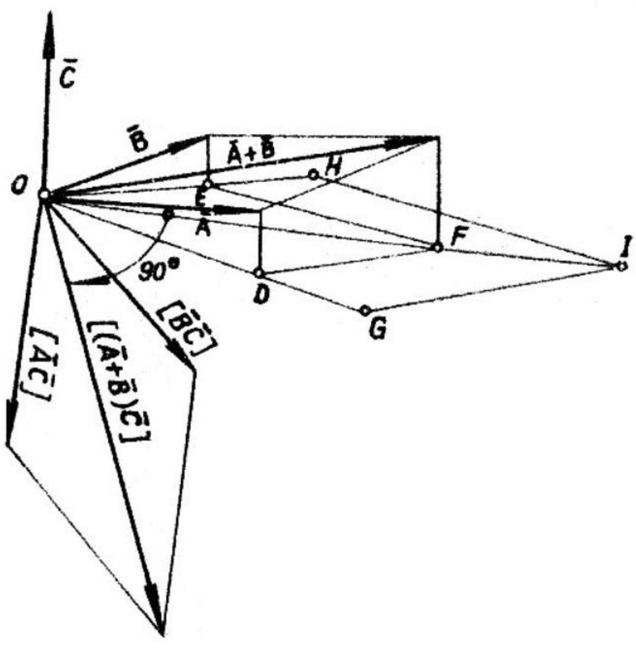


Figura 2.11.

Paralelogramul având laturile $\overline{A}$ și $\overline{B}$ și diagonalele $\overline{A}+\overline{B}$ se proiectează pe planul perpendicular în 0 la vectorul $\overline{C}$. Paralelogramul din acest plan ODFE, se amplifică de

C ori și se rotește in sens corespunzător cu 90°. Obține astfel vectorul $[\bar{A}\bar{C}]$, $[\bar{B}\bar{C}]$ și $[(\bar{A} + \bar{B}), \bar{C}]$ de unde se vede că $[(\bar{A} + \bar{B}), \bar{C}]$ este rezultanta $[\bar{A}\ \bar{C}] + [\bar{B}\ \bar{C}]$.

În afară de cazurile banale când $\bar{A} = 0$ sau $\bar{B} = 0$, produsul vectorial $[\bar{A}\bar{B}] = 0$ dacă $\sin(\bar{A},\hat{}\bar{B}) = 0$ adică $[\bar{A}\ \bar{B}] = 0$ dacă A ǁ B și deci $[\bar{A}\ \bar{A}] = 0$. Adică produsul vectorial a doi vectori paraleli este nul. Special, pentru versorii axelor sistemului rectangular $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ vom avea:

$$[\bar{\imath}\ \bar{\imath}] = [\bar{\jmath}\ \bar{\jmath}] = [\bar{k}\ \bar{k}] = 0$$

$$[\bar{\imath}\ \bar{\jmath}] = -[\bar{\jmath}\ \bar{\imath}] = \bar{k};$$

$$[\bar{\jmath}\ \bar{k}] = -[\bar{\bar{k}}\ \bar{\jmath}] = \bar{\imath};\ [\bar{\bar{k}}\ \bar{\imath}] = -[\bar{\imath}\ \bar{k}] = \bar{\jmath};$$

astfel:

$$[\bar{A}\ \bar{B}] = [(Ax\,\bar{\imath} + Ay\,\bar{\jmath} + Az\,\bar{k})(Bx\,\bar{\imath} + By\,\bar{\jmath} + Bz\,\bar{\bar{k}})]$$

2.1.6. Produse duble

2.1.6.1. Dublul produs scalar

Dublul produs scalar $\bar{A}\ (\bar{B}\ \bar{C})$, cum $\bar{B}\ \bar{C}$ dă un scalar care este un vector de forma m $\bar{A}$, deci un vector înmulțit cu un scalar/amplificat și este pe direcția vectorului $\bar{A}$ / care în general diferă de exemplu de ($\bar{A}\ \bar{B}$)$\bar{C}$ /.

2.1.6.2. Produsul mixt

Produsul scalar $[\bar{A}\ \bar{B}]\bar{C}$ sau $\bar{C}[\bar{A}\ \bar{B}]$, desigur este o mărime scalar egală cu aria paralelogramului format de $\bar{A}$ și $\bar{B}$, înmulțită cu proiecția lui $\bar{C}$ pe perpendiculara la parallelogram /figura 2.12., adică este volumul paralelipipedului format de vectorii $\bar{A}$, $\bar{B}$ și $\bar{C}$.

Produsul mixt se mai notează $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ sau $[\bar{A}\bar{B}\bar{C}]$ și este pozitiv sau negative după cum sistemul format de cei trei vectori este sau nu sistem drept.

Din însăși noțiunea de volum rezultă că produsul mixt este unul nul, $[\bar{A}\ \bar{B}]\bar{C} = 0$, dacă $\bar{A}$, $\bar{B}$ și $\bar{C}$ având punct de aplicație comun, sunt coplanari.

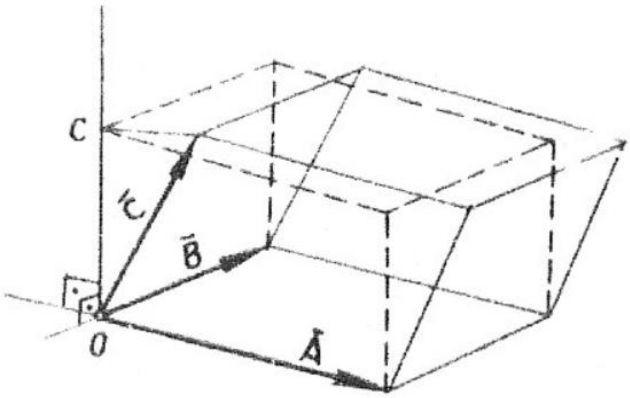


Figura 2.12.

2.1.6.3. Dublu produs vectorial

Produsul $[\bar{A}[\bar{B}\bar{C}]]$ este desigur tot un vector. Proiecția pe axa OX /de exemplu/ al vectorului rezultat în urma operației de înmulțire vectorială dublă, este conform relației:

$$A_y[\bar{B}\bar{C}]_z - A_z[\bar{B}\bar{C}]_y = A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z)$$

adunând la acest rezultat egalitatea:

$$A_xB_xC_x - A_xB_xC_x = 0$$

și grupându-le se obține:

$$B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) = B_x(\bar{C}\bar{A}) - C_x(\bar{A}\bar{B})$$

Procedând la fel și pentru componentele după celelalte douăaxe și însumându-le rezultă,

$$[\bar{A}[\bar{B}\bar{C}]] = \bar{B}(\bar{C}\bar{A}) - \bar{C}(\bar{A}\bar{B})$$

Aplicând formulele de mai sus, produsele mai complicate se reduc la produse mai simple, spre exemplu: $[\bar{A}\bar{B}]$ $[\bar{C}\bar{D}]$.

2.1.7. Derivata unui vector depinzând de un parametru

Fie vectorul $\bar{A}$ depinzând de un parametru t (timpul) $\bar{A}=\bar{A}$ (t).

Dacă luăm raportul dintre $\Delta\bar{A} = \bar{A}$ $(t + \Delta t) - \bar{A}$ (t) și Δt , derivata vectorului $\bar{A}$ în raport cu parametrul t este tot un vector, presupunând că acest vector limită există. Dând raportului $d\bar{A}/dt$ aceeași definiție ca și la analiza scalar, regulile de derivare pentru sumă și cele trei feluri de produse se mențin, adică derivate unei sume este egală cu suma derivatelor, iar în privința produsului scalar și vectorial avem:

$[\bar{A}'\bar{B}] = -[\bar{B}\,\bar{A}']$, având grijă să nu se inverseze ordinea .

Capitolul 3
MECANICA PUNCTULUI MATERIAL

3.1. Elementele cinematicii punctului material

3.1.1. Noțiuni cinematice de bază. Viteză, accelerație.

Descrierea cinematică a mișcării punctului material înseamnă cunoașterea poziției acestuia în orice moment față de un sistem de referință. Sistemul de referință poate fi ales acceptând originea sistemului o, și ducând prin această origine trei axe perpendiculare între ele. Convenim că axele x y z să fie astfel alese ca sistemul de axe de coordonate să fie un sistem drept, adică cele trei axe x y și z să corespundă degetelor: mare, arătător și mijlociu de la mâna dreaptă ca în figura 3.1.

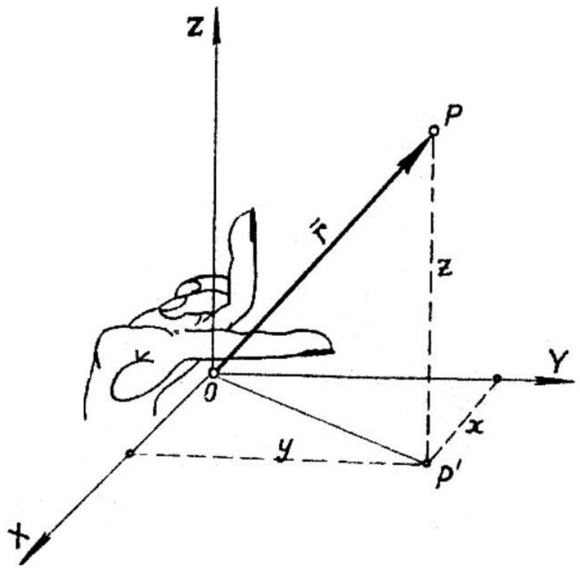


Figura 3.1.

Poziția punctului P este complet definită dacă sunt cunoscute coordonatele x, y și z. Poziția punctului P poate fi definită de vectorul de poziție

$$\bar{r} = \overline{(OP)}$$

Deoarece proiecțiile acestui vector pe cele trei axe sunt chiar coordonatele x, y și z. Sunt cazuri, când pentru caracterizarea poziției punctului P, în locul sistemului de axe rectangulare este mai convenabil să folosim alt sistem, de exemplu sistemul de coordonate sferic sau cilindric. Mișcarea punctului material, din punct de vedere cinematic este determinată dacă cunoaștem vectorul de poziție ca funcție de timp:

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

sau analitic,

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

Presupunem că funcțiile de mai sunt sunt funcții continue și, în vederea celor ce urmează, sunt cel puțin de două ori derivabile.

Ecuațiile desigur definesc o curbă, curba descrisă de punctul mobil P, adică definesc traiectoria, deoarece este totodată sistemul de ecuații parametrice al traiectoriei. Dacă punctul material din punctul A al traiectoriei, în timpul t, ajunge în B, arcul AB = a (în lipsa de puncte de întoarcere) reprezintă spațiul parcurs în timpul arătat, iar vectorul $\overline{AB}$ ste deplasarea punctului în acest timp.

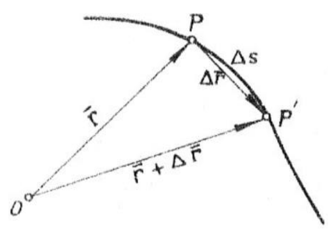


Figura 3.2.

Fie punctul material al momentul t în poziția P definită de vectorul de poziție $\bar{r}$. După intervalul de timp Δt, punctul material ajunge în P' definită de vectorul $\bar{r} + \Delta\bar{r}$.

Deplasarea punctului material în timpul Δt va fi $\overline{PP`} = \Delta\bar{r}$ (figura 3.2.). Vectorul $\Delta\bar{r} / \Delta t$, știind că $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$, în afară de momentul t mai depinde și de intervalul ales Δt poate caracteriza mişcarea numai dacă acest interval se alege "suficient" de mic.

Vectorul viteză (sau pe scurt viteza) este derivată în raport cu timpul a vectorului de poziție. În cazul cel mai general $(\bar{V})$ este funcție de timp și $(\bar{V}) = (\bar{V})(t)$ este viteza punctului mobil la momentul t.

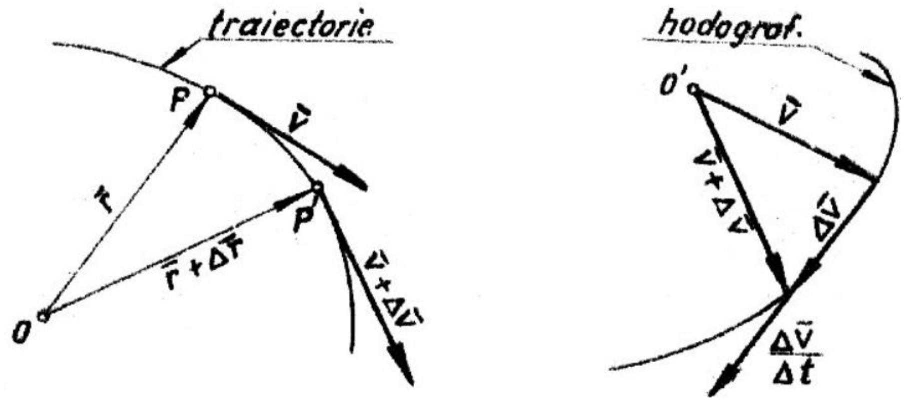


Figura 3.3.

Din figura 3.3. rezultă clar că vectorul $\Delta\bar{r} / \Delta t$ la limită are direcția tangentei la curbă în P, sensul este în sensul mişcării punctului de la P spre P', iar mărimea $\Delta\bar{r}$ tinde spre mărimea spațiului Δs , de aceea direcția vitezei va fi mereu direcția tangentei la traiectorie iar ca mărime derivata spațiului în raport cu timpul: ds/dt. Accelerația va caracteriza variația vitezei în timp. Pe baza unor considerente similare celor de mai înainte, vectorul accelerație (sau pe scurt accelerația) este derivata în raport cu timpul a vectorului viteză, sau derivata a doua a vectorului de poziție.

3.1.2. Viteza și accelerația în diferite sisteme de coordonate.

3.1.2.1. Coordonate arteziene

Dacă $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$ și $\bar{k}$ sunt versorii axelor de coordonate atunci:

$$\bar{r} = \bar{x}i + \bar{x}j + \bar{x}k$$

Versorii fiind constanți, după derivare în raport cu timpul obținem :

$$\overline{V} = \overline{r}` = \overline{x}`i + \overline{y}`j + \overline{z}`k$$

3.1.2.2. Coordonate naturale

Notăm cu $\overline{\delta}$ vectorul unitar pe direcția tangentei la traiectorie în P. Cu $\overline{\upsilon}$ vom nota vectorul unitar perpendicular pe $\overline{\delta}$ vom nota vectorul unitar perpendicular pe și cuprins în planul determinat de $\overline{V}$ și $\overline{V} + \Delta\overline{V}$. Vectorul binormal β să fie perpendicular pe $\overline{\delta}$ și $\overline{\upsilon}$ și cu sensul ales astfel încât să obținem un sistem rectangular drept.

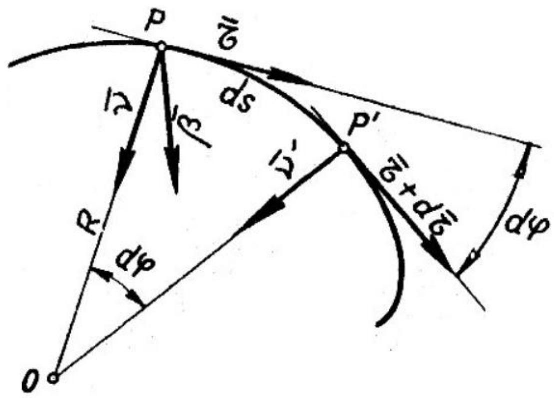


Figura 3.4.

Sistemul astfel obținut formează sistemul natural, care în diferitele puncte ale traiectoriei se schimba, însă în multe cazuri folosirea sistemului natural este mai avantajoasă. Viteza are direcția vectorului unitar $\overline{\delta}$ a cărei mărime este: V = ds/dt.

Din figura 2.4. rezultă că unghiul dφ se poate exprima:

$$d\varphi = ds/R$$

și se obține

$$\overline{\delta}` = 1/R \quad ds/dt\ \overline{\upsilon} = V/R\ \overline{\upsilon}$$

3.1.2.3. Coordonate polare plane.

Poziția punctului P poate fi determinată cu ajutorul vectorului de poziție $\bar{r} = \overline{OP}$ și unghiul φ dintre $(\bar{r})$ și o dreaptă fixă. Considerăm, că dreapta fixă față de care măsoară unghiul φ este axa ox din planul xoy ca în figura 3.5. și deci se poate scrie:

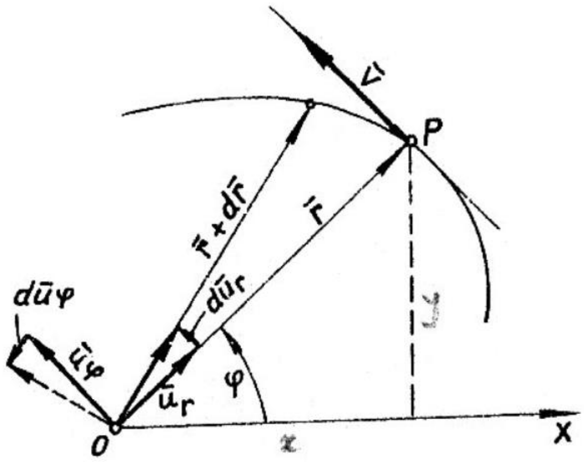


Figura 3.5.

Viteza respectiv accelerația punctului P pot fi descompuse după direcția vectorului de poziție $\bar{r}$ și după o perpendiculară pe aceasta. În vederea exprimării componentelor cu ajutorul mărimilor r, φ și derivatele acestora, obținem vectorul unitar derivat este perpendicular pe vectorul unitar și are mărimea.

$$(d\ \varphi)/dt = \varphi`$$

3.1.2.4. Coordonate polare cilindrice

Poziția punctului P poate fi exprimata cu ajutorul coordonatelor polare plane ρși φ (proiectând punctul P pe planul xoy) și cota z al punctului fata de planul xoy. În loc de r am introdus notația ρ spre a pastra semnificația $\bar{r} = (\overline{OP})$.

În acest caz, viteza și accelerația vor avea componente și după axa oz.

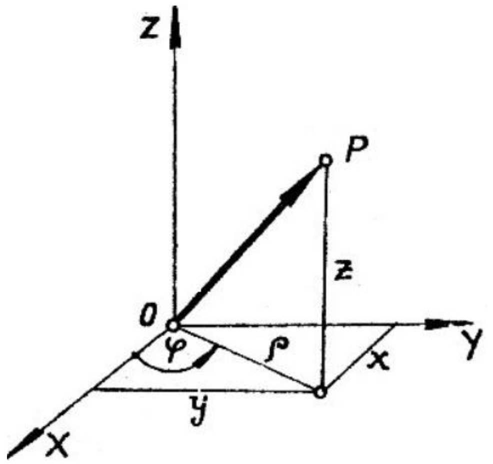


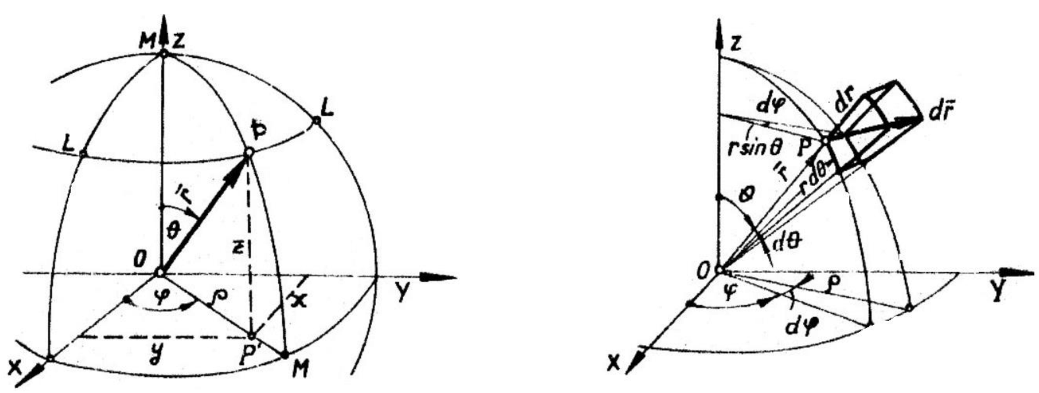
Figura 3.6.

3.1.2.5. Coordonatele sferice (polare spațiale)

Legătură dintre coordonatele carteziene și cele sferice se poate scrie pe baza figurii 3.7.

$$x = r \sin\theta \cos\varphi; \;\; y = r \sin\theta \sin\varphi; \;\; z = r \sin\theta$$

unde, $(0 \leq \theta \leq \pi)$ și $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$



a) **b)**

Figura 3.7.

Consideram o deplasare $\bar{d}r$ cu a punctului P că în figura 3.7.b. , după care coordonatele punctului vor fi: r + dr, θ + dθ, φ + dφ. Deplasarea elementară $\bar{d}r$ se poate vedea că este suma deplasărilor dr, rdθ și ρdφ = r sinθ dφ. Acestea, raportate la dt rezultă componentele vitezei în coordonatele sferice:

$$V_r = r`; \quad V_\theta = r\theta`; \quad V_\varphi = \sin\theta\varphi`$$

Modulul vitezei se calculează din:

$$V^2 = r`^2 + r^2\theta`^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\varphi`^2$$

3.1.3. Probleme simple de cinematică

Sunt în general trei grupe de probleme:

a. se cunoaște traiectoria punctului, se cere viteza și accelerația acestuia;
b. se cunoaște viteza punctului, se cere traiectoria;
c. se cunoaște accelerația punctului, se cere traiectoria acestuia.

În grupa a, matematic vorbind, se da $\bar{r} = \bar{r}(t)$și se cere $\bar{V}$ și $\bar{a}$, sau analitic (de exemplu în coordonate carteziene) sunt date x(t), y(t), z(t) și se cere determinarea componentelor vitezei și accelerației punctului.

3.1.3.1. Mișcarea circulară uniformă

Drept exemplu pentru problemele din grupa a, vom trata aceasta mișcare. Mișcarea punctului P pe un cerc de raza r, cu V = constant, poate fi caracterixata prin faptul că unghiul de rotație φ este proporțional cu timpul, adică φ = ωt sau φ` = ω = constant.

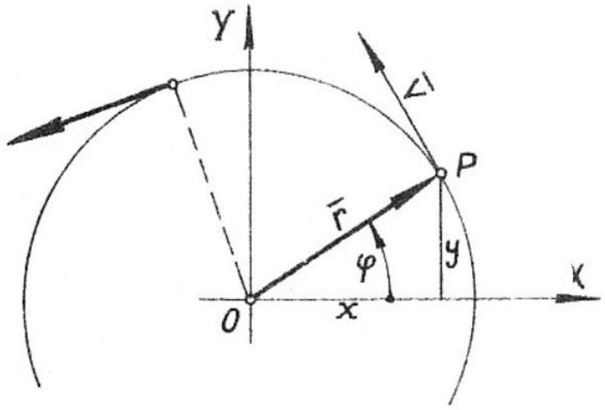


Figura 3.8.

Dacă cercul este în planul xoy și unghiul de rotire φ se măsoară de la axa ox, atunci coordonatele punctului P sunt:

$x = r \cos \cdot \omega t$

$y = r \sin\omega t$

Componentele vitezei conform relațiilor vor fi:

$V_x = x' = -\,\omega_r \sin \cdot \omega t$

$V_y = y' = -\,\omega_r \cos \cdot \omega t$

Se observă faptul că unghiul format de vectorul viteză $\overline{V}$ cu axa ox este mai mare cu $\pi/2$ decât unghiul format de vectorul de poziție $\bar{r}$ cu aceeași axa, deci $\overline{V}$ este tangent la cerc în P

Atfel componentele accelerației sunt:

$$a_x = x`` = -\,\omega^2 r \cos \omega t = -\,\omega^2 x$$

$$a_y = y`` = -\,\omega^2 r \sin \omega t = -\,\omega^2 y$$

rezultă:

$\bar{a} = -\,\omega^2 r$

ecuație ce arata că vectorul accelerației $\bar{a}$ este pe direcția vectorului de poziție $\bar{r}$ și are sensul de la P spre O, adică accelerația este "normală" (centripetă) iar modulul va fi:

$$a = \omega^2;\ r = \frac{V^2}{r}$$

Rezultatele de mai sus se obțin mai ușor în coordonate polare plane, deoarece r = const. , φ\` = ω = const. Astfel:

$$V_r = r\text{`} = 0;\ V\varphi = \varphi\text{`} = r\ \omega = V$$

$$a_r = r\text{``} - r\ \varphi^{\text{`}2} = - r\ \omega^2 = -\frac{V^2}{r};\ a_\varphi = r\ \varphi\text{``} + 2\ r\text{`}\varphi\text{`} = 0$$

Și mai ușor se obțin aceste rezultate daca ne folosim de sistemul natural, avem:

$$V_\mathfrak{z} = V;\ V_\upsilon = 0 \text{ și } a_\mathfrak{z} = V\text{`} = 0;\ a_\upsilon = \frac{V^2}{r}$$

În cazul acestei mișcări, legătură intre viteza unghiulară ω, perioada de rotație T și frecvența $\upsilon = 1/T$ este:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ \upsilon$$

unde ω fiind 2π ori frecvența, are și denumirea de frecvență circulară. Facem observație că la această mișcare denumirea de "uniformă" se datorează mărimii constante a vitezei (respectiv a lui), vectorul viteză însă ca direcție, nu este constant și de aceea mișcarea este accelerată.

3.1.3.2. Mișcarea rectilinie uniformă

În cadrul grupei b, de probleme vom da ca exemplu mișcarea rectilinie uniformă. La această grupă de probleme se cunoaște (în urma măsurătorilor; sau considerente teoretice) viteza punctului. Matematic vorbind se dă $\overline{V}$ ($\bar{r}$, t) și ce cere funcție $\bar{r}$ (t), sau analitic (de exemplu, în coordonate carteziane), din funcțiile date V_x (x,y,z,t), V_y (x,y,z,t), V_z (x,y,z,t) să se determine funcțiile. Problema este pur matematică, adică rezolvarea ecuației diferențiale vectoriale $\bar{r} = \bar{V}$ ($\bar{r}$, t), sau rezolvarea a trei ecuații diferențiale de gradul întâi:

$$x` = V_x\ (x,y,z,t)$$
$$y` = V_y\ (x,y,z,t)$$
$$z` = V_z\ (x,y,z,t)$$

Cum din matematică se știe, sistemul are o rezolvare generală, conținând trei constante de integrare. Aceste constante de integrare sunt determinate de poziția inițială a punctului în mișcare prin faptul că pentru funcțiile obținute $\bar{r}$ (t) adică x (t), y (t), z (t) prescriem umătoarele condiții inițiale:

$$\text{la } t = 0,\ \bar{r} = \bar{r}_0 \text{ adică } x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$$

În cazul mișcării cu viteza constanta(vectorul este constant) , soluția generala este:

$$\bar{r} = \bar{c}t + \bar{d}$$

relație în care vectorul $\bar{d}$ conține toate acele mișcări ale căror viteza este $\bar{C}$.

În cazul special când la momentul t = 0 punctul se afla în poziția data prin $\bar{r}_0$, condiția inițială da $\bar{r}$ (0)= $\bar{r}_0$. Problema deci are soluția:

$$\bar{r} = \bar{c}t + \bar{r}_0$$

ceea ce ne arată că punctul se mișcă cu viteză constantă $\bar{C}$ pe o dreaptă paralelă $\bar{C}$ dusă prin vârful vectorului $\bar{r}_0$ (figura 3.9.).

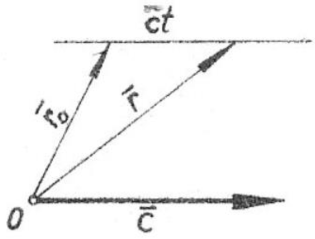


Figura 3.9.

Mişcarea rectilinie uniformă este mişcarea cea mai simplă. Acceleraţia în cazul acestei mişcări şi numai în cazul acesteia, este nulă. Rezolvarea analitică duce în cazul alegerii dreptei pe care se deplasează punctul, drept axa OX în ecuaţia:

$$X = ct + x_0$$

3.1.3.3 Mişcarea uniformă variată

Această mişcare vă fi discutată în cadrul grupei c, de probleme unde, matematic vorbind se dă şi se cere, sau analitic, sunt date:

$$a_x(x,y,z \quad V_x,V_y, V_z, t)$$
$$a_y(x,y,z \quad V_x,V_y, V_z, t)$$
$$a_z(x,y,z \quad V_x,V_y, V_z, t)$$

şi se cere: x (t), y (t), z (t).

Din nou rezolvarea este pur matematică, adică rezolvarea ecuaţiei diferenţiale vectoriale de gradul doi:

$$\bar{r}`` = \bar{a}\,(\bar{r}, \bar{r}`, t)$$

sau analitic, rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale de gradul doi:

$$x`` = a_x\,(x, y, z, x`, y`, z`)$$
$$y`` = a_y\,(x, y, z, x`, y`, z`)$$
$$z`` = a_z\,(x, y, z, x`, y`, z`)$$

Integrala generală, cum din matematică se ştie conţine 6 constante. Aceste constante se determină din condiţii iniţiale:

$$\text{la } t = 0 \text{ avem } \bar{r} = \bar{r}_0 \text{ și } \bar{r}` = V_0$$

adică

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0 \text{ și } x` = V_{ox},\ y` = V_{oy},\ z` = V_{oz}$$

3.1.4. Oscilații armonice. Suprapunerea (compunerea) oscilațiilor

Mișcările ale căror faza (fiecare fază!) se repetă în anumite intervale de timp sunt des întâlnite în tehnică. În cele ce urmeză, vom stabili pentru unele mișcări periodice simple câteva legi. Aceste legi prin natura lor pur matematică sunt valabile în afara de mișcării mecanice în cazul oricărui fenomen periodic – oscilații - și deci au aplicabilitate larga în toate domeniile fizicii.

3.1.4.1. Oscilații armonice.

Mișcarea periodică cea mai simplă - care se poate descrie matematic foarte ușor - este mișcarea punctului material pe o dreaptă astfel că față de o origine O pe această dreaptă, distanța x (elongația), să fie o funcție sinusoidală sau cosinusoidală de timp:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

sau

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Această mișcare poartă numele de mișcare rectilinie oscilatorie armonică. Proiectând mișcarea circulară uniformă pe o dreaptă din planul cercului, rezultă o astfel de mișcare. În ce condiții ia naștere o mișcare oscilatorie armonică vom vedea în cadrul dinamicii. Deocamdată ne limităm la descrierea acestei mișcări. Mărimile A, ω, φ pot fi recunoscute pe baza mișcării curculare uniforme, însă acestea rezultă relațiile următoare:

A este elongația maxima numită amplitudine.

Deoarece este vorba de o funcție sinusoidală, elongația x se repetă la intervale:

$$T = 2\pi/\omega$$

unde T este timpul de oscilație sau perioada.

Numărul de oscilații în unitate de timp se numește frecvență, $1/T = \upsilon$ a cărei unitate de măsură este este $1\ S^{-1} \equiv 1$ hertz (Hz), astfel:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\upsilon$$

ω poartă numele de frecvență circulară sau pulsație și este numărul de oscilații în timpul 2π . Argumentul $\omega t + \varphi$ este faza oscilației. Constanta de fază φ depinde de momentul începerii măsurării timpului. Dacă acest moment este ales astfel încât în locul lui t să avem $t + \pi/2\omega$ se va modifica și constanta de fază φ cu $\pi/2$, cu alte cuvinte, pentru descrierea mișcării sunt valabile ambele relații. Dacă originea timpului alegem drept momentul trecerii punctului prin polul O om sensul pozitiv al axei (deci pentru $t = 0$, $x = 0$) atunci din $x = A \sin \omega t$, viteza $x` = \omega A \cos \omega t = 2\pi/T\ A \cos 2\pi/T\ t$, va fi maxima în momentul trecerii punctului prin polul O ($t = 0, T/2, T,\ldots$) și nulă în punctele de întoarcere ($t= T/4. 3T/4,...$).

Accelerația

$$x`` = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$

Accelerația este proporțională cu elongația x și de sens contrar, adică vectorul accelerație arată mereu spre polul O numit centru de oscilație. Astfel din relația anterioară putem tragem concluzia că dacă punctul material are accelerația

$$x`` = \omega^2 x = 0$$

avem de a face cu o mișcare oscilatorie armonică. În vederea justificării acestei afirmații trebuie să arătăm că toate soluțiile ecuației diferențiale pot fi scrise astfel. Se știe că soluția generală a unei ecuații diferențiale liniare omogene de gradul doi este combinația lineară a două soluții particulare independente, având drept cele două soluții particulare independente L sin și cos t, astfel că soluția generală este:

$$C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

În locul constantelor C_1 și C_2 putem introduce alte două constante: A și φ prin ecuațiile $C_1 = A \cos \varphi$; $C_2 = A \sin \varphi$.

Ecuația este identică cu cele scrise anterior și reprezintă o mișcare oscilatorie armonică. Ori de câte ori ecuațiile de mai sus sunt valabile pentru orice variație în timp a lui x putem vorbi în general despre oscilații armonice sau oscilații sinusoidale. (Deci x poate însemnă: unghi, intensitatea curentului electric, intensitatea câmpului/ magnetic/ etc). În prezentul curs vom mai întâlni ecuația:

$$x`` = -\omega^2 x \text{ sau } x`` = -k x$$

sub numele de ecuația diferențială a oscilației armonice a cărei timp de oscilație este $T = 2\pi/\omega$.

3.1.4.2. Suprapunerea oscilațiilor

Se poate întâmplă că punctul material să execute simultan două sau mai multe oscilații armonice. În cele ce urmează vom trata numai cazurile când oscilațiile sunt de aceeași direcție sau perpendiculare între ele, deoarece toate celelalte cazuri pot fi reduse la una din aceste două variante.

Dacă două oscilații au aceeași direcție și frecvențe egale, deci:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

atunci printr-o simplă transformare gonimetrică,

$$x = x_1 + x_2$$

obținem:

$$(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \cos \omega t$$

Să deteminăm două constante, A și φ , astfel că să avem:

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi$$
$$A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \varphi$$

Acest lucru este posibil deoarece suma pătratelor ecuațiilor oferă:

$$A = \sqrt{(A_1^2+A_2^2+2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1))}$$

şi raportul lor ne dă

$$\phi = \text{arc tg}((A_1 \sin\varphi_1+A_2 \sin\varphi_2) / (A_1 \cos\varphi_1+A_2 \cos\varphi_2))$$

Cu aceste valori se poate scrie sub forma:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Și deci două oscilații de aceeași direcție de aceeași frecvență ω se compun, dând naștere tot la o oscilație de frecvență ω a cărei amplitudine A respectiv constantă de fază se calculează conform relațiilor scrisee anterior.

Aplitudinea A a oscilației rezultante depinde de diferența de fază φ_2-φ_1 = ʒ

Special, amplitudinea A în cazul amplitudinilor date A_1 și A_2 va fi maximă, $A = A_1 + A_2$ dacă:

$$ʒ = \varphi_2 - \varphi_1 = 0; \quad \pm 2\pi; \quad \pm 4\pi$$

și minimă, $A = A_1 - A_2$ dacă:

$$ʒ = \varphi_2 - \varphi_1 = 0 ; \quad \pm\pi ; \quad \pm 3\pi ; \quad \pm 5\pi$$

Dacă $A_1 = A_2$ amplitudinea oscilației rezultante este nulă – adică cele două oscilații se sting reciproc (extincție). Relațiile de mai sus sunt importante în fenomenele de interferență.

Compunerea oscilațiilor de aceeași direcție dar frecvențe diferite.

Rezultanta a două oscilații armonice de frecvențe diferite, servindu-ne de funcția cosinus este:

$$x = A_1 \cos \omega 1 \cdot t + A_2 \cos \omega_2 \cdot t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Observăm că ecuația nu poate fi adusă la forma A cos($\omega t + \varphi$) și deci nu este vorba de o oscilație armonică. Tragem însă concluzia că dacă raportul frecvențelor circulare este un număr rațional atunci oscilația rezultantă este periodică și are drept ω, cel mai mare divizor comun al frecvențelor ω_1 și ω_2.

În acest caz, $\omega_1 = m\omega$ și $\omega_2 = n\omega$ unde m și n numere întregi, și deci:

$$x = A_1 \cos m\omega\, t + A_2 \cos [n\, \omega\, t + (\varphi_2 - \varphi_1)]$$

Valoarea funcției se repetă în timpul $T = 2\pi/\omega$, deci perioada este T. Dacă de exemplu raportul $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{2}$ nu este vorba de un fenomen periodic.

Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare având frecvențe circulare egale

Considerând două oscilații, conform celor prezentate anterior se poate scrie pentru oscilația după axa OX:

$$x = A \cos\omega t$$

Oscilația perpendiculară pe aceasta este

$$y = B \cos[\omega\, t+(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

Ecuațiile de mai sus sunt ecuațiile parametrice a unei curbe plane (planul XOY). Pentru a recunoaste mai ușor curba, ecuațiile de mai sus vom aduce forma f(x,y) = 0. Prin eliminarea parametrului:

$$y/B = \cos \omega t \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin \omega t \sin (\varphi_2 - \varphi_1) = x/A \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sqrt{(1- x^2/A^2)} \text{ x } \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$$

sau

$$[y/B - x/A \;\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^2 = (1 - x^2/A^2) \sin^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Rezultă:

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 - 2xy/AB \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

este ecuația unei curbe de gradul doi – o elipsă – deoarece coordonatele x și y pot avea numai valori finite cuprinse între valorile A și B. Oscilația rezultantă este o oscilație eliptică, elipsa fiind în dreptunghiul delimitat de 2A și 2B, cu centrul în centrul oscilațiilor componente O. Pozitța elipsei în acest dreptunghi se determină prin metodele geometriei analitice din A, B și $ʒ = \varphi_2 - \varphi_1$

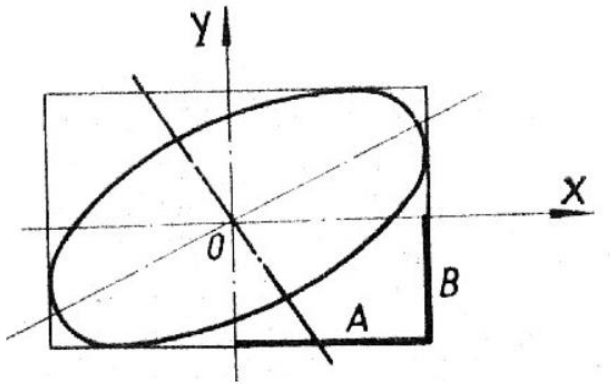


Figura 3.10.

Cazuri speciale:

a. Dacă $ʒ = 0$ sau $ʒ = \pi$ atunci $(x/A + y/B)^2 = 0$, adică elipsa se degenerează în dreptele $y = B/A\ x$ pentru $ʒ = 0$

$y = - B/A\ x$ pentru $ʒ = \pi$

și deci oscilația este liniară.

b. Dacă $\delta = \pi/2$ sau $\delta = 3\,\pi/2$ atunci $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$

deci elipsa are drept axe principale axele de coordonate avand semiaxele egale cu A respectiv B.

c. Dacă pe lângă cele de la b, avem și A = B, traiectoria este un cerc și deci oscilația este

circulară deoarece în acest caz ecuațiile iau forma:

$$x = A \cos \omega t;\; y = A \sin \mp \omega t$$

punctul (x, y) ce reprezintă oscilația parcurge cercul cu viteza unghiulară (ω) constantă, sensul fiind dat de semnul + sau −. Atragem atenția că două oscilații cu amplitudini egale (A) și sensuri contrare de oscilație dau naștere la o oscilație liniară de amplitudine 2A. Dacă pentru t = 0 diferența de fază este δ , rezultanta este bisectoarea unghiului, și are valoarea maximă 2A.

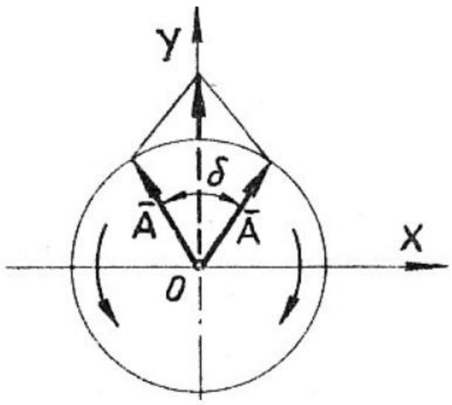


Figura 3.11.

Compunerea oscilatiilor armonice perpendiculare avand frecventa circulare diferite.

Dacă presupunem ca frecvențele celor două mișcări diferă foarte puțin, adică $\varepsilon = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$, se poate scrie:

$$x = A \cos\omega_1 t$$

$$y = B \cos(\omega_2 t + \delta) = B \cos(\omega_1 + \varepsilon t + \delta)$$

Sub această formă, oscilațiile pot fi considerate ca fiind oscilații cu frecvențe egale însă a căror diferență de fază variază cu timpul (foarte lent). Astfel punctul ce reprezintă oscilația descrie conform niste elipse a căror poziție se schimbă mereu ca în figura 3.12.

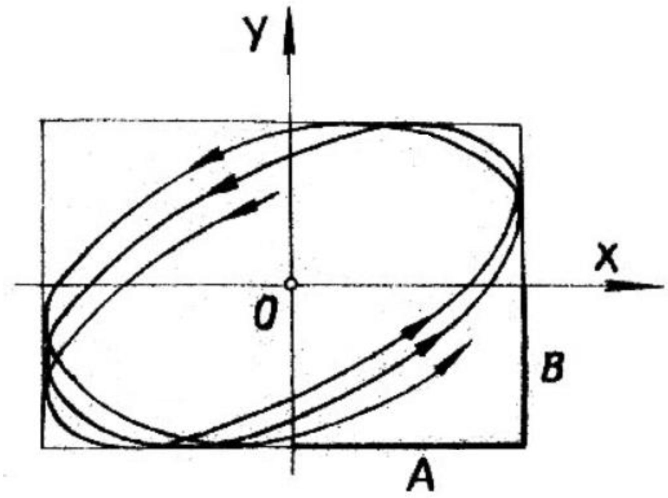


Figura 3.12.

Atragem atenția ca mișcarea este periodică și în acest caz dacă raportul ω_1/ω_2 este un număr rațional (numai în acest caz obținem o curbă închisă). Perioada fiind $T = 2\,\pi/\omega$ unde ω este cel mai mare divizor comun al frecvențelor ω_1 și ω_2. Dacă raportul frecvențelor nu este un număr rațional punctul în mișcare nu se va ajunge niciodată în poziția de plecare (nu rezultă curba închisă) și deci oscilația nu poate fi periodică.

Un exemplu simplu pentru cazul când frecvențele sunt diferite: $\omega_1 = \omega$ și $\omega_2 = 2\omega$, însă raportul lor este un număr rațional:

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\cos 2\omega t$$

Rezultă:

$$y = B\,(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = B\,(2\cos^2 \omega t)$$

Cu aceasta, se obține:

$$y = B(2x^2/A^2 - 1)$$

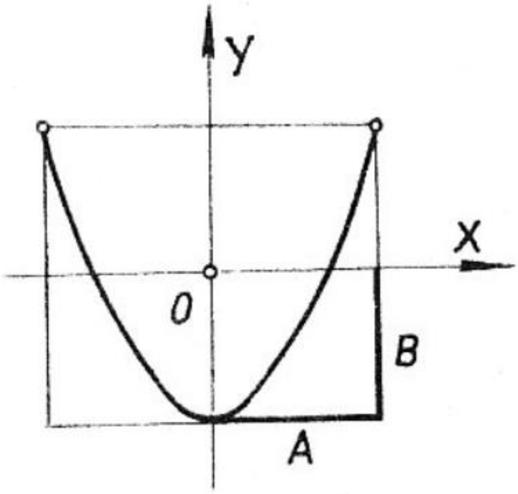


Figura 3.13.

În figura 3.13. este reprezentată ecuatia unei perabole. Deoarece valorile maxime pentru x și y sunt A respectiv B, punctul trebuie să rămână mereu pe porțiunea de parabolă din figura 3.13. și deci mișcarea este periodică. Curbele obținute prin suprapunerea oscilațiilor perpendiculare având frecvența circulare diferite sunt cunoscute sub numele comun de curbe "Lissa jous".

3.2. Problemele generale ale dinamicii punctului natural

În cadrul cinematicii punctului material nu ne-am pus problema cunoașterii cauzei mișcării. Dinamica are sarcina principală determinarea miscării cunoscând cauzele care provoacă mișcarea. Pentru rezolvarea problemelor de dinamica în afara noțiunilor cunoscute din cinematica mai sunt necesare și alte noțiuni de bază.

3.2.1 Legile fundamentale ale mecanicii. Axiomele lui Newton.

3.2.1.1. Principiul inerției

S-a văzut in cadrul cinematicii că mișcarea cea mai simplă este cea rectilinie uniformă. Este logic sa ne punem întrebarea: în ce condiții ia naștere această mișcare?

Experiența ne arată că o bilă căreia i se imprimă o mișcare pe o suprafață orizontală parcurge un spațiu cu atât mai lung cu cât suprafața este mai netedă.

Tragem concluzia că mișcarea vitezei bilei pe planul orizontal se datorează unor cauze exterioare, adică intercțiunii cu alte corpuri. Dacă am putea elimina complet cauzele exterioare, bila s-ar deplasa cu aceeași viteză până la infinit. Acest lucru a fost recunoscut în esență de GALILEI (1594-1642), KEPLER(1571-1630) și DESCARTES (1596-1650) și formulat explicit de NEWTON (1642-1727) sub denumirea de "Lex prima".

Proprietatea corpurilor de a menține viteza respectiv starea de repaos în lipsa unor cauze exterioare este inerția, iar legea se numește legea inerției și se enunță astfel: "Un corp își păstrează starea de repaos sau de mișcare rectilinie și uniformă, atât timp cât nu intervine altă forță care să-i modifice această stare".

Deducem, că mișcarea rectilinie uniformă, și din punctul de vedere al dinamicii, este mișcarea cea mai simplă deoacere pentru menținerea acestei stări de mișcare nu este necesară nicio forță exterioară. Axioma este extrapolarea la un caz ideal al unor observații experimentale, dar nu poate fi verificată direct deoarece corpul nu poate fi scos de sub influența corpurilor din jur.

Axiona are sens numai dacă se indică și sistemul de referință în care are valabilitate. Dacă axioma are valabilitate într-un anumit sistem nu este valabilă în alt sistem. De exemplu, un corp este în repaos față de sistemul fixat de pământ, însă are accelerație față de sistemul fixat de Soare.

Newton a enunțat acest principiu pentru "spațiul absolut" ceea ce nu poate fi determinat experimental. Teoretic ne multumim cu a admite ca există un asemenea sistem de referință în care legea inerției este valabilă. Acest sistem definit chia cu legea inerției poartă numele de sistem inerțial. Care sistem de referință este sistem inerțial nu știm, dar observațiile experimentale ne pot da răspunsul de la caz la caz. Din punct de vedere practic în majoritatea cazurilor chiar sistemul fixat de Pământ poate fi considerat inerțial dacă este vorba de descrierea unor mișcări de scurtă durată.

Putem deci recapitula că există un asemenea sistem de referință în care un punct material "izolat" este în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă. Un asemenea sistem se numește sistem inerțial iar legile mecanicii sunt enuntate pentru acest sistem.

Experientele ne permit să privim drept sistem inerțial sistemului fixat de stelele fixe având originea sistemului în centrul soarelui.

3.2.1.2 Ecuația fundamentală a dinamicii. Axioma a II-a. Forța și masa

Deducem din principiul inerției că, dacă punctul material în sistemul inerției are o mișcare cu viteza variabilă - deci are accelerație - aceasta se datorează acțiunii unor alte corpuri din jur. Corpurile din jur acționează cu anumite forțe asupra punctului material. Știm deci că forța este cauza accelerației punctului material în mișcare. Forța fiind o mărime fizică poate fi definită prin metoda adecvată de măsurare. Doarece despre forță am luat cunostință prin intermediul accelerației viom face apel la definiție. “Forța este proporțională cu accelerația, direcția forței fiind aceeași cu direcția accelerației și este în sensul acesteia”. Această definiție în esență este axioma a II-a.

Ar fi simplu să admitem în definiția de mai sus forte chiar egală cu accelerația. În acest caz însaă, pentru toate corpurile aruncate cu aceeași forță ar trebui să obținem aceeași accelerație ceea ce însă este în contradicție cu experiența. De exemplu, pentru imprimarea unei aumite accelerații în cazul bilei de oțel este necesară aplicarea unei forțe mai mari decât în cazul unei bile de lemn de acelați diametru. Spunem ca bila din oțel este mai “inertă”, are inerție mai mare. Legătura între forță și accelerație se poate face numai printr-o mărime fizică pozitivă caracteristică corpului. Această marime reprezintă masa corpului (masa inertă).

Notând masa cu m, forța cu $\overline{\mathrm{F}}$, axioma are forma matematică:

$$\overline{\mathrm{F}} = \overline{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{a}$$

Aaceasta se numește ecuația fundamentală a dinamicii. Axioma nu a fost formulată inițial de Newton chiar așa cum rezultă din ecuația anterioară, ci în felul următor: “Variația cantității de mișcare este proporțională cu forța motoare și are loc după direcția dreptei după care acționează forța “ (și poartă numele de “Lex secunda”).

Conform acestei formulări inițiale, prin “cantitatea de mișcare” se ințelege produsul dintre masă și viteză iar prin “variație” derivată în raport cu timpul. Cantitatea de mișcare sau sub numele consacrat impulsul este:

$$\overline{H} = \overline{m} \cdot v$$

cu care

$$\overline{F} = (\overline{d} \cdot H) / dt = (d\ (\overline{m} \cdot v)) / dt$$

Ecuația de mai sus este indentică cu anterioara acesteia dacă presupunem că în timpul mișcării, masa rămâne constantă. Această cerință este de altfel condiția tactică a mecanicii clasice. În cazul mișcărilor având viteze apropriate de cea a luminii, masa m nu s-a dovedit a rămâne constantă, astfel că – conform teoriei relativiste – acuația este cea justă în care m este masa variabilă cu viteza și a cărei expresie este:

$$m = m_0 / \sqrt{(1 - V^2/C^2\ )}$$

unde C este viteza luminii în vid, m_0 masa corpului în repaus. Din ecuația anterioară rezultă că variația impulsului este integrală în funcție de timp a forței:

$$\overline{H}_2 - \overline{H}_1 = \int \overline{F} \cdot dt$$

Pentru măsurarea masei și a forței vom presupune următoarele. Aplicând o anumită forță prin intermediul unui arc, unei bile de oțel de masă m_1, aceasta va primi o accelerație $\bar{a}_1$. Forța $\overline{F}$ aplicată cu ajutorul aceluiași arc unei bile de lemn de masă m_2 va imprima acestuia o mișcare cu accelerația $\bar{a}_2$. Din egalitatea forțelor rezultă:

$$m_1\bar{a}_1 = m_2\bar{a}_2 \quad \text{sau} \quad m_1/m_2 = a_1/a_2$$

Relatia de mai sus ne permite determinarea raportului dintre masele a două corpuri dacă accelerațiile lor sunt cunoscute. Dacă se alege masa m_1 drept masă etalon, rezultă $m_2 = m_2\ (m_1)$.

Considerând greutatea, aceasta imprimă corpului lăsat să cadă liber o accelerație numită accelerația gravitației. Masa corpului este egală cu raportul dintre forța de greutate și accelerația gravitației:

$$m = G/g$$

unde g = 9,81 m^{-2} la latitudinea țării noastre și la nivelul mării.

În sistemul SI unitatea de măsură pentru masă, kilogramul, simbol kg. Kilogramul este masa prototipului internațional de platină iridiată, aprobat în anul 1889 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți și păstrat la Sèvres (Franța). Unitatea de măsură pentru forță este Newtonul, simbol N.

$$1 \cdot \frac{Kg \cdot m}{a^2} = 10^5 \text{ dyn} = 1 \text{ N}$$

Conform relatiei, greutatea corpului este porporțională cu masa sa. Greutatea masei de un kilogram se alege drept unitate practică de măsură pentru forță și se numește kilogram-forță, simbol kgf.

$$1 \text{ kgf} = 9,81 \cdot 10^5 \text{ dyn} = 9,81 \text{ N}$$

Știind că $\bar{a} = \bar{r}$ ``, axioma se poate scrie sub forma

$$\bar{m}\, r`` = F$$

Analizând ecuația, în cadrul problemelor de dinamică vom întâlni două categorii de probleme și anume :

- fiind cunoscute elementele cinematice ale mișcării se determină funcția $\bar{r} = \bar{r}(t)$ și din aceasta prin derivare rezultă forța $\bar{F}$.
- fiind dată forța $\bar{F}$, prin integrarea ecuației se determină $\bar{r} = \bar{r}\,(t)$.

Facem remarca, că ecuația se referă în cazul unui sistem de forțe la rezultanta forțelor adică în loc de $\overline{F}$ se poate pune $\overline{R} = \overline{F}1 + \overline{F}2 + ...$ și deci axioma II conține și legea paralelogramului.

3.2.1.3. Principiul acțiunii și reacțiunii

Acest principiu se enunță astfel: „ La orice acțiune corespunde o reacțiune egală și contrară” sau, acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt totdeauna egale și îndreptate în sens contrar (Lex tertia), pe scurt

$$\overline{F}_{12} = - \overline{F}_{21}$$

Putem enumera multe exemple pentru acest principiu. Majoritatea exemplelor la o analiză superficială contrazic principiul. De exemplu, putem trage ușor o căruță încărcată. În acest exemplu însă în afară de forțele $\overline{F}_{12}$ și $\overline{F}_{21}$ intervin și forțele dintre om și sol și căruță și sol. Legea este valabilă gândindu-ne la faptul că pe o suprafață perfect lucie tragerea căruței ar fi imposibilă și deci în acest caz $\overline{F}_{12} = - \overline{F}_{21}$.

Pare paradoxal, dar în cazul căderii libere a unei pietre de masa m, Pământul de masă M, în sistemul international se mișcă spre piatră cu o accelerație $\overline{a}$ astfel că $mg = M_a$ adică, $\overline{F}_{mM} = - \overline{F}_{mM}$.

Din aceste exemple rezultă că acest principiu este valabil în mecanica clasică atât în cazul contactului direct între corpuri,cât și în cazul acțiunii de la distanță.

Fiind vorba de interacțiunea corpurilor, această axiomă este legea de bază în cazul sistemelor de puncte materiale sau corpuri.

3.2.1.4. Principiul independenței acțiunii forțelor

Acest principiu este cunoscut sub numele de legea paralelogramului și se enunță astfel: ,,Dacă asupra punctului material acționează simultan două forte, mișcarea punctului este aceeași ca și când asupra sa ar acționa o singură forță, rezultanta acestora. ”

Pe baza acestei legi se scrie sub forma:

$$m\,\overline{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n$$

și deoarece însumarea vectorială este asociativă, fiecare forță își exercită efectul asupra punctului material independent de celelalte forțe. De aici și denumirea principiului.

3.2.2. Ecuațiile de mişcare ale punctului material

Dacă punctul material se poate mișca liber în spațiu, se poate pune problema determinării poziției acestuia în funcție de timp, cunoscute fiind masa m și forța $\overline{F}$ (sau rezultanta $\overline{R}$).

Pe scurt, se cunoaște funcția vecorială

$$\overline{F} = \overline{F}\,(\overline{r},\ \overline{r}\,', t)$$

și se cere

$$\overline{r} = \overline{r}\,(t)$$

Problema se rezolvă integrând ecuația diferențială vectorială de gradul doi:

$$\overline{F} = m\,\overline{r}\,''$$

sau analitic:

$$X = m\,x''$$

$$Y = m\,y''$$

$$Z = m\,z''$$

Ecuațiile de mai sus, sunt ecuațiile de mișcare ale punctului material liber / EULER 1707-1783 /.

În aceste ecuații

$$X = X\,(x, y, z, x', y', z', t)$$

$$Y = Y\,(x, y, z, x', y', z', t)$$

sunt funcții date.

$$Z = Z\,(x, y, z, x', y', z', t)$$

Dacă spre exemplu, asupra punctului material acționează numai forța gravitațională, ecuațiile de mișcare vor fi:

$$m\,x'' = 0$$

$$m\,y'' = 0$$

$$m\,z'' = -m\cdot g$$

Simplificarea cu m în ultima ecuație arată că mișcarea este independentă de masa punctului material.

3.2.2.1. Lucru mecanic. Energie cinetică

Înmulțind ecuația fundamentală scalar cu $\bar{r}\,'$ se obține o ecuație scalară simplă:

$$m \cdot \bar{r}\,'' \cdot \bar{r}\,' = \bar{F} \cdot \bar{r}\,'$$

sau

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,\bar{r}\,'^2\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,\bar{V}^2\right) = \bar{F}\frac{d\bar{r}}{dt}$$

Integrând între limitele t_1 și t_2, obținem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\,\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot dt$$

Dacă notăm vectorul de poziție al punctului cu $\bar{r}_1$ la momentul t_1 și cu $\bar{r}_2$ la momentul t_2, iar mărimile vitezelor corespunzătoare cu V_1 și V_2, se poate scrie:

$$\frac{1}{2}\,m\,V_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,V_1^2 = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} F \cdot d\bar{r}$$

Atât partea dreaptă cât și partea din stânga a ecuației definește câte o nouă mărime:

- partea dreaptă se numește lucru mecanic;
- partea stângă definește energia cinetică.

Integrala din partea dreaptă a ecuației (2.118) se numește lucru mecanic / PONCELET 1829. Înțelegem prin lucru mecanic elementar produsul scalar $\overline{F}\, d\overline{r}$, unde $d\overline{r}$ este deplasarea elementară a punctului material suc acțiunea forței $\overline{F}$. Din definiția produsului scalar, conform figurii 3.14. obținem:

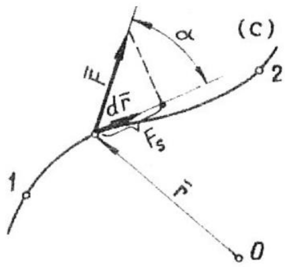


Figura 3.14.

$$\overline{F}\, d\overline{r} = F\, |\, d\overline{r}\, |\cos\alpha = F\, ds \cos\alpha = Fs\, ds$$

Lucrul mecanic elementar este produsul dintre componenta pe direcția deplasării a forței $\overline{F}$ și spațiul ds. Lucrul mecanic elementar poate fi pozitiv, negativ sau nul după cum forța $\overline{F}$ formează cu direcția deplasării $d\overline{r}$ un unghi ascuțit, drept sau obtuz. Dacă punctul material acționat de forța $\overline{F}$ se deplasează pe curba (C) din poziția 1 în poziția 2, lucrul mecanic total va fi suma lucrurilor mecanice elementare:

$$L = \int_1^2 \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_1^2 F_s \cdot d\overline{s}$$

Conform relației scrise anterior, lucrul mecanic este integrala în funcție de spațiu a forței și în general depinde de curba dintre punctele 1 și 2.

Lucrul mecanic este o mărime scalară și se exprimă în SI în Jouli, 1 J = 1N.1m.

Lucrul mecanic pozitiv este lucrul mecanic motor (L_m) care poate pune în mișcare un corp, adică este factorul care produce mișcarea corpului asupra cărui acționează.

Lucrul mecanic negativ este un lucru mecanic rezistent (L_r) pentru efectuarea căruia este necesar să se consume o energie exterioară, adică forța se opune deplasării corpului asupra căruia acționează.

Dacă deplasarea punctului de aplicație al forței este tot timpul perpendiculară pe forță, lucrul mecanic este nul.

Expresia analitică a lucrului mecanic elementar într-un sistem cartezian este:

$$dL = \overline{F}\, d\overline{r} = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$$

Lucrul mecanic în afară de pozițiile 1 și 2 mai depinde și de arcul 12 ceea ce înseamnă că lucrul elementar $Xdx + Ydy + Zdz$ în general nu este diferențială totală.

Pentru anumite forte care se numesc conservative, lucrul mecanic efectuat între punctele 1 și 2 nu depinde de forma și lungimea traiectoriei, ci numai de pozițiile acestor puncta.

Lucrul mecanic elementar al unui sistem de forțe care acționează asupra punctului material se obține prin însumarea lucrurilor mecanice elementare date de fiecare forță în parte. Această proprietate derivă din suma vectorilor, $\overline{F} = \overline{F}1 + \overline{F}2$ care se înmulțește scalar cu $d\overline{r}$:

$$\overline{F}\, d\overline{r} = \overline{F}1\, d\overline{r} + \overline{F}2\, d\overline{r}$$

sau după integrare,

$$L = L1 + L2$$

Variația cantității de lucru mecanic în raport cu timpul se numește putere mecanică:

$$P = dL/dt = (\overline{F} d\overline{r})/dt = \overline{F} \cdot \overline{V}$$

Dacă cantitatea de lucru mecanic produsă în fiecare unitate de timp este aceeași, puterea mecanică este:

$$P = L/t$$

Partea stângă a ecuației definește energia cinetică a punctului material de masă m și viteză V:

$$Ec = 1/2\ m\ v2$$

Denumire improprie “forță vie”. LEIBNITZ 1686/.

Variația energiei cinetice a punctului material este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forțele care acționează asupra punctului material. Această teoremă este teorema energiei cinetice. Accentuăm că se iau în considerație toate forțele, deoarece $\overline{F}$ poate fi considerat ca rezultanta sistemului de forțe care acționează asupra punctului material. În caz contrar, teorema nu este valabilă. Ca exemplu: dacă deplasăm un corp pe o suprafață orizontală, astfel ca viteza corpului să fie constantă, și considerăm și frecarea, forța noastră musculară efectuează lucru mecanic în ciuda faptului că energia cinetică a corpului nu variază deoarece viteza este constantă. Dacă însă luăm în considerație forța de frecare, suma tuturor forțelor este nulă, și deci și suma lucrurilor mecanice este nulă în conformitate cu teorema.

Două exemple simple:

- O forță care rămâne mereu perpendiculară pe traiectorie – deci nu efectuează lucru mecanic – nu poate modifica viteza ca mărime.

Din L = 0 rezultă $E_{c2} = E_{c1}$ și deci $V_2 = V_1$. În legătură cu direcția vitezei teorema nu face nicio precizare.

- Un punct material aruncat pe verticală în sus cu o viteză inițială VO se ridică la o înălțime h pentru care

$$\frac{1}{2}\ m\ O^2 - \frac{1}{2}\ m\ V_0^2 = -\ m\ g\ h$$

adică,

$$h = \frac{V_0^2}{2 \cdot g}$$

Unitatea de măsură în sistemul SI pentru:

lucru mecanic și energie este Joule, 1 J = 1 N.m = 107 erg.

puterea mecanică, este Watt, 1 W = (1J)/(1s) = (1 N.1m)/1s = 107 erg s^{-1}

3.2.2.2. Randamentul mecanic

În timpul funcționării unei mașini, forța motoare produce lucrul mecanic motor L_m, care reprezintă lucrul mecanic cheltuit (prestat) pentru funcționarea mașinii.

În același timp, forțele rezistente și cuplurile rezistente produc un lucru mecanic rezistent L_r care se compune din lucrul mecanic util L_u în scopul căruia funcționează mașina, și lucrul mecanic pasiv L_p, consumat pentru învingerea forțelor pasive (frecări, rezistențe ale mecanismelor etc.)

În cazul funcționării de regim, întregul lucru mecanic motor se consumă în lucru mecanic rezistent dacă,

$$L_m = L_r \text{ sau } L_m = L_u + L_p$$

Se numește randament mecanic raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic motor

$$\eta = L_u/L_m = (L_m - L_p)/L_m = 1 - L_p/L_m < 1$$

Raportul $\varphi = L_p/L_m$ poartă numele de coeficient de pierdere.

Randamentul mecanic caracterizează eficacitatea modului de funcționare al unei mașini.

Câmp de forță conservativ. Energie potențială. Teorema conservării energiei.

Câmp scalar; câmp vectorial. Dacă tuturor punctelor P(x,y,z) sau $\bar{r}$ = (x,y,z) al spațiului (sau al unui domeniu al spațiului) aparține o valoare numerică dată U sau un vector dat $\bar{V}$, spunem că funcția U(x,y,z) sau U($\bar{r}$) determină un câmp scalar, iar $\bar{V}$(x,y,z) sau $\bar{V}$($\bar{r}$) determină un câmp vectorial.

Exemple de câmp scalar: repartizarea presiunii atmosferice, repartizarea temperaturii în atmosferă.

Exemple de câmp vectorial: viteza de scurgere a unui lichid, câmpul gravitațional.

Desigur, un câmp vectorial este echivalent cu 3 câmpuri scalare (vx, vy, vz).

Câmpul scalar este caracterizat prin suprafețe de nivel. O suprafață de nivel constă din mulțimea punctelor în care U are aceeași valoare c. Ecuația unei suprafețe de nivel este deci

$$U(x,y,z) = c$$

Câmpul vectorial poate fi caracterizat prin linii de vectori (linii de forță). Curbele care au tangentele dirijate după vectorii câmpului poartă denumirea de linii de forță. Determinarea lor analitică se obține prin rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi. Dacă vx, vy, vz sunt proiecțiile vectorului $\overline{V}$ pe axe atunci liniile corespunzătoare câmpului $\overline{V}$ vor fi date de ecuațiile:

$$dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z$$

unde v_x, v_y, v_z sunt funcții de x, y, z.

Ca exemplu, forța greutății raportată la un sistem de axe având OZ dirijat vertical în sus, $\overline{G}$ (o, o, -G), ne va da liniile de forță satisfăcând sistemul de ecuații diferențiale

$$d_x/o = d_y/o = d_z/(-G)$$

Adică congruența de drepte

$$x = c_1 \ ; \ y = c_2$$

c_1, c_2 fiind constante arbitrare. Deci liniile de forță vor fi formate de congruența dreptelor verticale.

Dacă într-un domeniu $\overline{V}$ = ct, adică liniile de forță sunt niște drepte paralele, astfel încât prin fiecare unitate de suprafață trece același număr de linii, se spune că, câmpul de forță este omogen.

Până în prezent, forța $\overline{F}$ ce acționează asupra punctului material, am presupus – în cazul cel mai general – ca fiind funcție de poziție, viteză și timp,

$$\overline{F} = \overline{F}\,(\,\overline{r}, \overline{r}\,', t)$$

Forța $\overline{F}$ ar mai putea fi și funcție de accelerație sau chiar accelerații de ordin superior, însă asemenea forțe sunt rar întâlnite în problemele de mecanică. În cazul de mai sus, referitor la integrarea ecuațiilor de mișcare nu cunoaștem nicio teoremă. Există însă anumite forțe – cele mai des întâlnite – pentru care teoremele de integrare pot fi ușor stabilite.

Dacă forța $\overline{F}$ este funcție numai de poziție și timp

$$\overline{F} = \overline{F}\,(\,\overline{r}, t) = \overline{F}\,(x,y,z,t)$$

astfel încât fiecărui punct al câmpului, la un moment dat îi corespunde o anumită forță determinată, atunci acest câmp înzestrat cu caracteristici de forță poartă numele de câmp de forță.

Câmpul de forță este constant în timp dacă $\overline{F} = \overline{F}\,(\,\overline{r}\,)$, adică nu conține în mod explicit pe t.

În toate celelalte cazuri, câmpul de forță este variabil în timp.

Numim câmp de forță conservativ, câmpul de forță constant în timp având următoarea proprietate de bază: în câmpul conservativ, lucrul mecanic efectuat de-a lungul oricărei curbe închise este nul, respectiv lucrul mecanic efectuat între punctele $A(x_0, y_0, z_0)$ și $B(x_1, y_1, z_1)$ ale curbei este independent de forma și lungimea curbei dintre A și B.

Să considerăm un punct material P, asupra căruia acționează o forță conservativă, funcția de forță corespunzătoare fiind U(x,y,z). Fie $B(x_1,y_1,z_1)$ poziția momentană a punctului P și A (x_0,y_0,z_0) poziția sa inițială. Lucrul mecanic LAB al forței $\overline{F}$ pe drumul AB va fi

$$LAB = U(x_1,y_1,z_1) - U(x_0,y_0,z_0)$$

Energia potențială a punctului este lucrul mecanic LAB luat cu semn schimbat

$$V = U(x_0,y_0,z_0) - U(x_1,y_1,z_1)$$

Deoarece funcția U nu poate fi determinată decât cu aproximația unei constante aditive, rezultă că și energia potențială corespunzătoare va avea aceeași nedeterminare.

Potențialul este determinat pe baza ecuațiilor anteriore numai până la valoarea unei constante aditive arbitrare deoarece dacă V este potențial și V^+ const. este potențial și deci valoarea energiei potențiale poate fi luată ca fiind nulă într-un punct oarecare ales arbitrar.

Fie acest punct de energie potențială nulă punctul A (x_0,y_0,z_0) dat de vectorul de poziție $\overline{r}_0$, iar punctul $B(x_1,y_1,z_1)$ să aibă poziția dată de vectorul $\overline{r}_1$.

Expresia cu semnul negativ fiind mai des întâlnită se poate spune și astfel: energia potențială într-un punct $B(\overline{r}_1)$ al cîmpului este egală cu lucrul mecanic efectuat contra forțelor câmpului pentru a deplasa punctul material din punctul nul A în punctul dat B.

Exemple de câmp conservativ:

a) *Câmpul gravitational al Pământului* se poate scrie cu ajutorul ecuațiilor:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg$$

Admițând g = constant, deci forță constantă, avem de-a face cu un câmp de forță omogen,având asuprafețele echipotențiale drept plane paralele cu z = const., și linii de forță niște drepte verticale. Energia potenţială, făcând abstracție de constanta aditivă arbitrară este

$$V = m \cdot g \cdot z$$

b) *Câmpul atracţiei universale*. Conform legii atracției universale a lui Newton, între două puncte materiale există o forță de atracție reciprocă direct proporţională cu masele acestora și invers proporţională cu pătratul distanței dintre ele.

Punctul de masă m_1, va acţiona asupra punctuluí de masă m_2, aflat la distanța $\overline{r}$ cu forța

$$\overline{F} = -\ \gamma\ (m_1\ m_2)/r^2$$

unde constanta de atracție universală

$$\gamma = 6{,}66 \cdot 10^{-8}\ CGS$$

Câmpul atracției universale în coordonate carteziene se scrie:

$$X = -\ \alpha/r^2\ \ x/r$$
$$Y = -\ \alpha/r^2\ \ y/r$$
$$Z = -\ \alpha/r^2\ \ z/r$$

unde am notat:

$$\alpha = \gamma\ m_1 \cdot m_2$$
$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2\ )}$$

Se poate demonstra că energia potențială este

$$V = -\ \alpha/r = -\ \gamma\ (m_1 \cdot m_2)/r$$

deoarece diferențiind, conform pentru prima component spre exemplu, obținem:

$$-\ \partial V/\partial x = -\ \partial V/\partial r\ \partial r/\partial x = -\ \alpha/r\text{^}2\ \ 1/2\ (x2 + y2 + z2)\ \ 1/2\ 2x = -\ \alpha/r\text{^}2\ \ x/r = X$$

Suprafețele echipotențiale sunt niște suprafețe sferice de ecuații r = const, concentrice în jurul lui m_1, iar liniile de forță sunt drepte concurente în punctul de masă m_1.

Teorema conservării energiei

Lucrul mecanic al forței $\overline{F}$ poate fi exprimat fie cu ajutorul energiei potențiale, fie cu ajutorul energiei cinetice. Egalând cele două ecuații:

$$L = V_1 - V_2 = E_{c2} - E_{c1}$$

sau

$$E_{c1} + V_1 = E_{c2} + V_2$$

ceea ce arată că suma $E_c + V$ în timpul mișcării rămâne constantă

$$E_c + V = const = E_m$$

$$1/2\ m\ (x'^2 + y'^2 + z'^2\ ) + V\ (x,y,z) = E_m$$

și se enunță astfel: într-un câmp de forță conservative, suma energiei cinetice și potențiale a punctului material este constantă și se numește energie mecanică totală (E_m).

Ca exemplu, luăm cazul aruncării punctului material de la cota z = o cu o viteză inițială V0 (indiferent sub ce unghi):

$$\frac{1}{2}\, m \cdot V_2 + m \cdot g \cdot z = \frac{1}{2}\, m \cdot V_{02}$$

sau

$$V_2 = V_{02} - 2 \cdot g \cdot z$$

Ecuația ne arată că valoarea vitezei depinde numai de cota z și deci este aceeași în punctele de aceeași cotă ale traiectoriei, care este o parabolă. Conform definitiei, forțe neconservative sunt toate forțele care sunt funcție de timp sau de viteză. În cazul forțelor neconsecutive nu este valabilă teorema conservării energiei mecanice deoarece în fenomenele ce au loc intervin și alte forme de energie (de exemplu energie calorică).

Luând cazul căderii libere a unui corp în aer (sau în alt mediu), în afară de forța (-mg) mai intervine și forța (-kz') datorită rezistenței aerului (proporțională cu viteza și în sens contrar sensului mișcării). Ecuația de mișcare va fi deci

$$m \cdot z'' = - m \cdot g - k \cdot z'$$

Observăm deci, că în locul ecuației $E_c + V = E_{co} + V_o$, valabilă în cazul căderii libere în vid, obținem:

$$E_c + V = E_{co} + V_o - k \int_0^t k \cdot z'^2 dt$$

ceea ce ne arată că energia mecanică a scăzut în timpul t cu cantitatea dată de integrală, în schimb (conform măsurătorilor), s-a produs o cantitate de căldură echivalentă cu aceasta.

3.2.3. Forțe centrale. Teorema ariilor. Momentul forței. Moment cinetic.

3.2.3.1. Forțe centrale

Forța ,,acționând asupra unui punct material se numește forță centrală dacă suportul forței trece prin punctul 0, numit centru. Centrul 0 se alege drept punct de referință și-l considerăm fix în sistemul inerțial. În conformitate cu cele de mai sus, vectorul forță este pe direcția vectorului de poziție, având același sens sau sensul contrar acestuia. Despre vectorul accelerație în cazul acestei mișcări numită mișcare centrală se poate spune același lucru ca și despre fortă, adică este pe directia vectorului de pozitie, iar ca sens, poate fi același cu vectorul de pozitie sau contrar acestuia.

Dintre mișcările descrise în cadrul cinematicii punctului, mișcare centrală are punctul material în cazul mișcării circulare uniforme, mișcării oscilatorii circulare, eliptice și liniare.

Considerăm ecuația fundamentală a dinamicii:

$$m \bar{r}'' = \bar{F}$$

Dacă această ecuație se înmulţeşte vectorial cu $\bar{r}$ se obține

$$m [\, \bar{r} \bar{r}''] = [\, \bar{r} \bar{F}]$$

Deoarece $\bar{r} \parallel \bar{F}$, partea dreaptă a ecuatiei este nulă, iar partea stângă se poate scrie sub forma:

$$d/dt [\, \bar{r} \bar{r}'] = [\, \bar{r}' \bar{r}'] + [\, \bar{r} \ \bar{r}''] = [\, \bar{r} \ \bar{r}'']$$

De unde rezultă că

$$d/dt [\, \bar{r} \bar{r}'] = 0$$

Sau după integrare

$$[\,\bar{r}\,\bar{r}\,'] = \bar{C} \text{ (vector constant)}$$

Ecuația se poate scrie sub forma:

$[\,\bar{r}\,\bar{r}\,'] = ([\,\bar{r}\,d\bar{r}\,'])/dt$ și are următoarea semnificație:

- modulul produsului vectorial $|\,[\,\bar{r}\,d\bar{r}\,]\,|$ - după cum se știe din definiția produsului vectorial – este dublul suprafeței dA determinată de vectorii $\bar{r}$ şi $d\bar{r}$ ca în figura 3.15., iar că vector este perpendicular pe suprafața triunghiului dA. Suprafața orientată $\overline{dA}$ este măsurată de raza vectoare $\bar{r}$ în timpul dt.

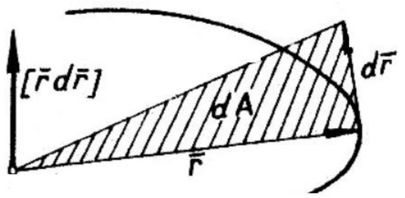


Figura 3.15.

Vectorul $(d\bar{A})/dt = 1/2\,[\,\bar{r}\,\bar{r}\,']$ se numește vector viteză areolară, modulul vitezei areolare fiind suprafața măsurată de către vectorul de poziție $\bar{r}$ în unitate de timp, iar ca direcție și sens determină planul măturat și sensul de măturare al suprafeței. Ecuaţia arată că viteza areolară este constantă. Direcţia fiind și ea constantă deducem că normala planului format de vectorii $\bar{r}$ și $d\bar{r}$ este mereu același și deci traiectoria este o curbă plană.

Prin integrarea ecuației $dA/dt = c$ obținem $A=C\,(t_2 - t_1)$, ceea ce ne arată că suprafața măsurată de raza vectoare între t_1 și t_2, este proporțională cu $t_2 - t_1$.

Ecuația exprimă teorema ariilor: viteza areolară a punctului material acționat de o forță centrală este constantă, traiectoria este o curbă plană, iar vectorul rază vectoare mătură în intervale de timp egale suprafețe egale. Această teoremă pentru cazul mișcării planetelor este cunoscută ca "legea a II-a a lui Kepler".

3.2.3.2. Teorema ariilor

Teorema ariilor poate fi exprimată și sub altă formă. Înțelegem prin momentul unui vector $\overline{B}$ în raport cu punctul 0 produsul vectorial $[\overline{r}\ \overline{B}]$, unde $\overline{r} = \overline{OP}$, P fiind punctul de aplicație al vectorului $\overline{B}$.

Momentul forței $\overline{F}$ este deci:

$$\overline{M} = [\ \overline{r}\,\overline{F}\ ]$$

iar momentul impulsului $\overline{H}$ = m V este

$$\overline{K} = [\ \overline{r},\ m\ \overline{V}\ ] = m\ [\ \overline{r}\ \overline{r}\ ']$$

Din definiția produsului vectorial rezultă că valoarea absolută a momentului forței $\overline{F}$ este $F_r \sin \alpha = F_1$, adică produsul dintre forță și braţul forței.

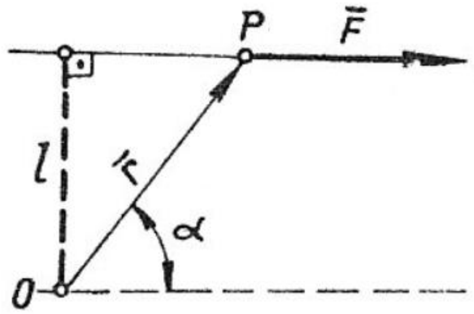


Figura 3.15.

Definiția generală dată de ecuația scrisă mai sus atribuie momentului forţei și direcție și sens. Astfel, momentul $\overline{M}$ este perpendicular pe $\overline{r}$ și $\overline{F}$ și are sensul dat de legea șurubului drept.

Ținând cont de ecuația se poate scrie:

$$[\ m\,\overline{r},\ \overline{r}\ ''] = d/dt\ m\ [\ \overline{r}\ \overline{r}\ '] = [\ \overline{r}\,\overline{F}\ ]$$

din care cu notațiile obținem :

$$\bar{K}' = \bar{M}$$

Relația exprimă teorema variației momentului cinetic: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic este egală cu momentul forţei. Este izbitoare asemănarea acestei ecuații cu ecuația stabilită în cadrul axiomei a II-a: $\bar{H}' = \bar{F}$.

Teorema conţine drept caz particular teorema ariilor stabilită pentru forțe centrale. În cazul forțelor centrale $\bar{r} \parallel \bar{F}$ și deci $\bar{M} = o$, de unde

$$\bar{K} = m\,[\,\bar{r}\,\bar{r}\,'] = \text{vector constant}$$

Ecuația exprimă teorema conservării momentului cinetic, teoremă identică cu teorema ariilor din punct de vedere al conținutului, însă mai generalizabilă ca formă.

3.2.4. Punct material supus la legături. Despre frecare

Până în prezent ne-am ocupat numai de punctul material liber care poate ocupa orice poziție în spaţiu, poziția sa fiind determinată numai de forțele care actionează asupra lui, nu și de alte condiții geometrice. Poziția sa este definită de trei parametri independenți, coordonatele punctului.

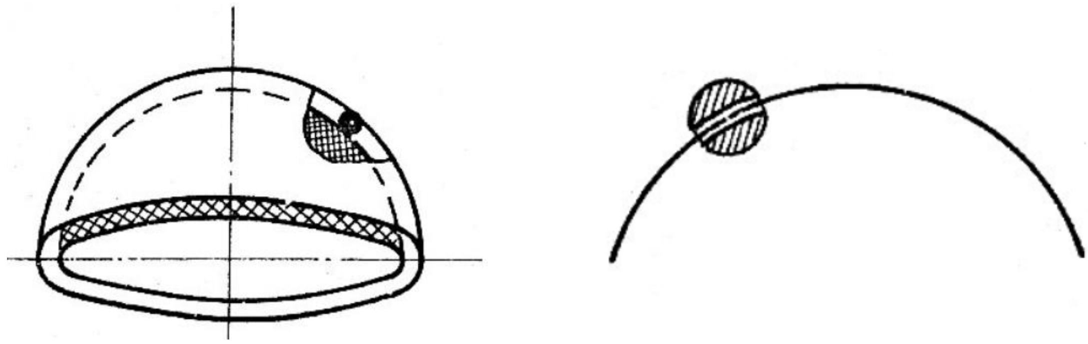
Înțelegem prin punct material supus la legături un punct natural obligat să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau într-un punct fix din spaţiu. Așa dar, condiția de legătură se exprimă cu ajutorul ecuației suprafeței sau a ecuațiilor curbei (intersecția a două suprafețe). În coordonate carteziene condiția de legătură în căzul unei suprafețe este:

$$f\,(x,y,z) = o$$

iar în cazul unei curbe:

$$f_1\,(x,y,z) = o\ ;\ f_2\,(x,y,z) = o$$

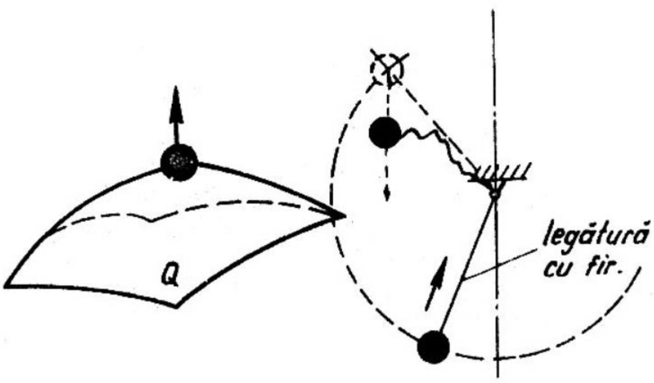
În orice moment al mișcării, coordonatele x,y,z al punctului material trebuie să satisfacă ecuația sau, ecuaţiile anterioare. Imaginea concretă a legăturii o putem intui considerând o bilă ce reprezintă punctul material între două suprafeţe apropiate ca în figura 3.16.a. Legătura dată poate fi materializată printr-o mărgea pe o sârmă ca în figura 3.16.b. Legăturile exprimate prin ecuațiile de mai sus se numesc bilaterale.



a) **b)**

Figura 3.16.

Dacă condiția de legătură este dată sub formă unei inegalități ca f (x,y,z) $\geq$ 0, spunem că legătura este unilaterală. Ca exemplu: condiția ca un punct material să rămână pe suprafața unei sfere, constituie o legătură bilaterală exprimată de execuția $x_2 + y_2 + z_2 = 0$, dacă sfera are raza R şi centrul în originea sistemului de coordonate. Condiția ca mobilul să rămână în interiorul sferei sau pe suprafața ei constituie o legătură unilaterală și se exprimă prin inegalitatea $x_2 + y_2 + z_2 - R_2 \leq 0$. Exemple de legături unilatere sunt date în figura 3.17.



a) **b)**

Figura 3.17.

În exemplul dat pentru legătura unilaterală, deoarece f (x,y,z) $\leq$ 0, punctul material ar putea evolua și în domeniul în care f (x,y,z) este negativă, în acest domeniu punctul nefiind obligat la nicio restricție geometrică. Restricția constă numai în faptul că punctul n-ar putea trece în domeniul f > 0 străbătând suprafață.

3.2.4.1. Forțe de legătură

Efectul oricărei legături asupra mișcării unui punct material este același cu cel al unei anumite forțe, convenabil determinată, numită forță de legătură sau reacțiune a legăturii. Legătura geometrică este deci înlocuită printr-o forţă determinată tocmai prin condiţia ca punctul să respecte legătura. Dacă legătura este înlocuită cu forța de legătură, punctul material poate fi considerat un punct liber acționat de forţele date - direct aplicate - și de forțele de legătură. Pe baza celor considerate mai înainte putem enunța axioma eliberării: pentru orice legături impuse punctului material există un sistem de forţe de legătură astfel, încât sub acţiunea lor și a forțelor efectiv aplicate, punctul să poată fi considerat liber.

Dacă $\overline{F}$ este forța efectiv aplicată (sau rezultanta sistemului de forţe) și $\overline{R}$ forța de legătură (sau rezultanta forțelor de legătură) ecuația mișcării punctului material va fi:

$$m\,\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}$$

În ecuație, vectorul $\overline{R}$ este necunoscut. El trebuie determinat astfel încât punctul material să respecte în decursul mișcării, legăturile impuse.

În cazul curbei descompunem vectorul $\overline{R}$ în două componente. O componentă tangentă la curbă, $\overline{R}\tau$, și o componentă conținută în planul normal al curbei $\overline{R}\nu$.

În cazul suprafeței, $\overline{R}\tau$ este în planul tangent la suprafață iar $R\nu$, este mereu pe direcția normalei momentane la suprafată.

Considerând legături ideale (fără frecare, lucii) componenta $R\nu$ nu are niciun rol în mișcarea punctului, ci numai în menținerea acestuia pe suprafața dată. Sub acțiunea componentei tangenţiale punctul se va mișca ca un punct material liber.

Pentru lămurirea acestei probleme luăm următorul exemplu. Pe un plan înclinat cu unghiul α se deplasează un punct material asupra căruia acţionează numai forţa de greutate, ca în figura 3.18.

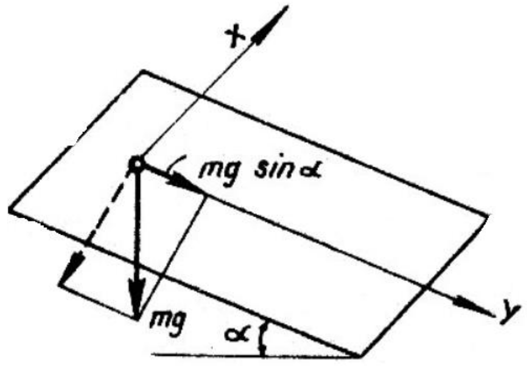


Figura 3.18.

Mişcarea punctului material poate fi determinată cu ajutorul ecuației:

$$m\,\bar{r}'' = \bar{R}\tau$$

Deoarece este vorba de o suprafață plană,

$$m\,g\sin\alpha = \bar{R}\tau,$$

iar ecuațiile de mișcare vor fi:

$$m\,x'' = 0$$
$$m\,y'' = m\,g\sin\alpha$$

Din relațiile de mai sus rezultă că punctul material pe planul înclinat are o mişcare accelerată, și diferă de mișcarea studiată la cinematică prin faptul că mișcarea are loc pe planul înclinat și accelerația este $y'' = g\sin\alpha$. Dacă punctul material pleacă din repaus la t = o, obținem:

$$x = o,\ y = \frac{1}{2} g \sin \alpha\ t_2$$

La punctul precedent am presupus legături ideale, forță de legătură reducându-se la o forță normală pe suprafată (sau normală la curbă). Legăturile în cazul suprafețelor aspre sunt legături cu frecare. În acest caz, componenta tangențială a forței de legătură poartă numele de forță de frecare.

Problema complexă a frecării nu aparține mecanicii punctului material, însă câteodată corpul a cărei mișcare se studiază, poate fi considerat punctiform și deci noțiunile legate de frecarea de alunecare se dau în acest capitol. (COULOMB 1736 - 1806).

Forța ce ia naștere în cazul frecării de alunecare, numită forță de frecare de alunecare se exercită în totdeauna în sens opus mișcării, mărimea fiind cu aproximație independentă de mărimea vitezei și de mărimea suprafeței de frecare.

Notăm forța de frecare cu $\bar{T}$, iar forța normală cu $\bar{N}$. Forța de frecare este proporțională cu forța normală:

$$T = \mu N$$

unde μ este coeficientul de frecare de alunecare.

Vectorul unitar având sens opus vitezei este - $\bar{V}/V$ astfel că forța de frecare se scrie

$$\bar{T} = - \mu N (\bar{V})/V$$

Referindu-ne tot la cazul coborârii punctului material pe un plan înclinat, forța normală va fi $N = m g \cos \alpha$ și deci forța de frecare va fi $T = \mu m g \cos\alpha$. Notând spaţiul cu s, ecuația de mișcare este

$$m s'' = m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha$$

sau

$$s'' \equiv a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

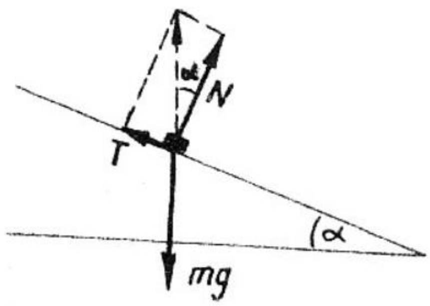


Figura 3.19.

Din cauza frecării, un corp având o anumită viteză inițială, coboară pe planul înclinat fără accelerație dacă planul are unghiul de înclinație φ astfel ca să fie valabilă ecuația:

$$\sin \varphi - \mu \cos \varphi = 0$$

adică să se anuleze ecuația și rezultă:

$$\mathrm{tg}\, \varphi = \mu$$

unde φ este unghiul de frecare.

Introducînd tg φ în ecuația rezultă:

$$s'' = g \sin(\alpha-\varphi)/\cos\varphi$$

deoarece $\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi = \sin (\alpha-\varphi)$.

În cazul urcării corpului pe planul înclinat, termenul ce conține pe μ vine cu semn schimbat și deci accelerația va fi:

$$s'' = g \sin(\alpha+\varphi)/\cos\varphi$$

Accentuăm că punctul material rămâne pe loc pe planul înclinat dacă: $T < \mu_0 N$

unde μ_0 este coeficientul de frecare de aderență și este ceva mai mare decât μ. Unghiul de frecare μ_0, definit de tg $\varphi_0 = \mu_0$ este acel unghi de înclinație al planului la care corpul "începe" să alunece pe plan.

3.2.4.2. Considerații geometrice

După cum am văzut, unghiul de frecare φ se determină cu expresia următoare, în care coeficientul de frecare μ este raportul între Tmax și N, deci:

$$\operatorname{tg} \varphi = \mu = T_{max}/N$$

În relația de mai sus am notat cu T_{max}, forța de frecare pentru care punctul material este în echilibru la limită. Echilibrul există deci pentru orice valoare $T \leq T_{max}$. Considerăm un punct material greu pe o suprafață orizontală aspră. Asupra sa acționează forța orizontală $\overline{F}$. Considerăm că punctul este în echilibru. Reprezentăm două cazuri ca în figura 3.20. și anume echilibrul la limită și echilibrul pentru care T < Tmax .

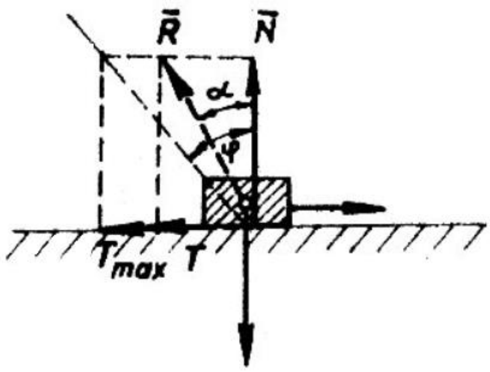


Figura 3.20.

Notăm cu α unghiul format de $\overline{R}$ cu normala la planul orizontal. Se deduce cu ușurință

$$\operatorname{tg} \alpha = T/N$$

Cum pentru echilibru se cere ca T ≤ Tmax, rezultă că tg ≤ tg φ exprimă aceeași condiție, și deci $\alpha \leq \varphi$. Cu alte cuvinte, pentru ca un punct material să fie în echilibru pe un plan aspru este necesar ca suportul reacțiunii $\overline{R}$ să facă un unghi $\alpha \leq \varphi$ cu normala la plan.

Generalizând rezultatul, în cazul unei suprafețe se poate spune: condiția de echilibru este îndeplinită dacă suportul rezultantei $\overline{R}$ este situat în interiorul conului de frecare,sau la limită pe suprafața conului (figura 3.21.).

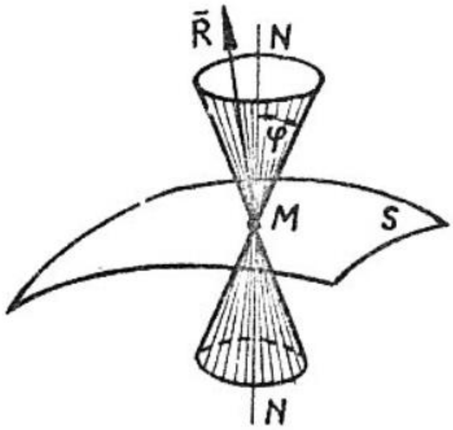


Figura 3.21.

3.2.5. Echilibrul punctului material

Ne punem întrebarea, ce condiții trebuie să îndeplinească forțele care acționează asupra punctului material pentru ca acesta să rămână în echilibru.

Conform axiomei I, prin echilibru înțelegem stare de repaus sau mişcare rectilinie uniformă, adică inexistența accelerației.

3.2.5.1. Echilibrul punctului material liber supus la acțiunea unui sistem de forțe concurente

Considerăm un punct material liber care se află în repaus. Ne propunem să găsim ce condiţii trebuie să îndeplinească sistemul de forțe aplicat asupra punctului, ca acesta să continuie să rămână în echilibru.

Vom recurge la două principii ale mecanicii:

a) principiul paralelogramului permite să se înlocuiască sistemul de forțe concurente cu o forță unică $\overline{R} = \sum \overline{F}_i$, numită rezultantă;

b) principiul inerției,conform căruia dacă un punct material liber se află în repaus, continuă să rămâna în această stare dacă nu intervine nici o forță care să-l scoată din echilibru.

Pe baza acestor două principii, tragem concluzia că pentru echilibru este necesar și suficient ca forța unică $\overline{R}$, al sistemului, să fie nulă:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = 0$$

Această condiție vectorială este echivalentă cu trei condiții scalare:

$$\sum \overline{X}_i = 0; \quad \sum \overline{Y}_i = 0; \quad \sum \overline{Z}_i = 0$$

În cazul unui sistem de forțe în același plan (planul oxy) rămân două condiții de echilibru:

$$\sum \overline{X}_i = 0; \quad \sum \overline{Y}_i = 0;$$

Pentru un sistem de forțe având suportul comun axa ox:

$$\sum \overline{X}_i = 0;$$

Problemele de echilibru pot fi împărţite în două grupe:

a) Se dau forţele care acționează asupra punctului material și se cere poziţia lui de echilibru;

b) Se dă poziția de echilibru a punctului material, se cer forțele care trebuie să acționeze asupra lui pentru a-l menține în poziția de echilibru.

În prima categorie, necunoscutele sunt coordonatele punctului. Deoarece dispunem de trei ecuații de echilibru în spațiu, respectiv două în plan, problema în general este rezolvabilă.

În a doua categorie, necunoscutele sunt mărimile și direcțiile forțelor. Dacă nu se face nici o menţiune asupra forțelor, problemele sunt în general nedeterminate, căci există o infinitate de sisteme de forțe ale căror rezultantă este nulă. Impunînd forţelor anumite condiţii astfel ca numărul necunoscutelor scalare să fie maxim trei în spațiu, respectiv două în plan, problemele pot fi rezolvate.

3.2.5.2. Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare

Pentru a găsi condiția necesară și suficientă pentru echilibru, vom înlătura legătura. Punctul material devine astfel liber. Dacă se admite că asupra lui acționează o forță egală şi opusă rezultantei forţelor efectiv aplicate, punctul material continuă să rămână în echilibru. Această forță înlocuiește legătura și poartă numele de reacțiune. Notând-o cu $\overline{R}$, condiţia de echilibru va fi:

$$\overline{R} + R = O$$

O problemă de echilibru a punctului material cu legături comportă două categorii de necunoscute: poziția punctului și forța de legătură. Pentru rezolvarea problemei se scriu ecuațiile de echilibru:

$$X + Rx = 0, \quad Y = Ry = 0, \quad Z + Rz, = 0$$

în cazul unui sistem de forţe în spatiu,

$$X + Rx = 0 \ ; \ Y + Ry, = 0$$

în cazul unui sistem de forţe în plan. Dacă în legătură cu reacțiunea $\overline{R}$ nu se pune nicio condiție, problema rămâne nedeterminată deoarece în afară de proiecțiile Rx, Ry, Rz, ale reacțiunii mai intervin 2 parametrii, în cazul suprafeței și un parametru în cazul unei curbe, care defines poziția de echilibru. Problema este determinată dacă punctul este obligat să rămână într-o anumită poziție fixă în spațiu. În acest caz, sunt trei necunoscute Rx, Ry, Rz și dispunem de cele trei ecuații de echilibru de unde:

$$Rx = -X; \; Ry = -Y; \; Rz = -Z;$$

sau (în plan)

$$Rx = -x; \; Ry = -y;$$

3.2.5.3. Echilibrul cu frecare al unui punct material

Rezultă din cele precedente că față de cazul legăturilor ideale, într-o problemă de echilibru cu frecare intervine în plus forța de frecare $\overline{T}$ care satisface anumite condiții. În cazul unei curbe aspre, determinarea forței de frecare $\overline{T}$, comportă cunoașterea unei singure necunoscute scalare și anume cunoașterea lui T. Într-adevăr, punctul de aplicație fiind cunoscut, (este chiar punctul material) precum și direcția forței fiind bine cunoscută, deoarece la o curbă într-un punct se poate duce în general o singură tangentă, rămâne ca necunoscută doar scalarul T al forței $\overline{T}$.

Scalarul T după cum știm se determină conform din cazul limită de echilibru:

$$| \overline{T} | = \mu \, | \overline{N} |$$

și deci problema determinării echilibrului punctului material supus la legături cu frecare de o curbă, este în general posibilă.

Dacă, însă, interesează toate poziiile de echilibru posibile pe o curbă aspră, problema devine nedeterminată, deoarece, pe lângă necunoscuta scalară T, se introduce și o inegalitate:

$$| \overline{T} | \leq \mu \, | N |$$

Sistemul de ecuații admite o simplă infinitate de soluții și deci se poate spune că: pe o curbă aspră, un punct material poate sta în echilibru în toate punctele unui arc al ei.

În cazul unei suprafețe aspre, determinarea forței de frecare $\overline{T}$ comportă cunoașterea a două mărimi scalare necunoscute și anume, valoarea forței și direcția ei în planul tangent la curbă. În planul tangent însă, directia forței T este nedeterminată.

Problema deci impune cunoașterea proiecțiilor forței $\overline{T}$ pe două direcții din planul tangent. Presupunem că cele două proiecții pe direcțiile p și q sunt T_p și T_q.

Pentru poziția de echilibru limită, având o singură ecuație și două necunoscute T_p și T_q, există în general o simplă infinitate de soluții, adică o infinitate de poziții de echilibru așezate pe o curbă.

Pentru aflarea celorlalte poziții de echilibru, având la dispoziție o inegalitate, sistemul de ecuații de echilibru are o dublă infinitate de soluții, adică echilibrul este posibil în punctele unei anumite regiuni ale suprafeței.

3.2.5.4. Echilibrul punctului material exprimat cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual

Considerăm un punct material liber care este în echilibru dacă $\overline{F}$ = o. Să dăm acestui punct material o deplasare foarte mică (imaginară) $\delta\overline{r}$. Numim această deplasare, deplasare virtuală și o notăm cu delta, spre deosebire de deplasarea reală $d\overline{r}$. Pe câtă vreme deplasarea $d\overline{r}$ are loc într-un interval de timp dt, deplasarea virtuală este instantanee, adică δt = o. Cu alte cuvinte viteza deplasării virtuale este infinită.

Dacă așa cum am presupus , punctul material este în echilibru, adică $\overline{F}$ = o, atunci și

$$\overline{F}\,\delta\overline{r} = 0$$

adică lucrul mecanic virtual este nul. Tragem concluzia că un punct material este în echilibru, dacă si numai dacă, lucrul mecanic virtual efectuat în cazul unei deplasări virtuale este nul. Această definiţie are avantajul că asigură aplicabilitatea principiului și în cazul punctelor materiale cu legături, adică din $\overline{R} + \overline{R}$ = o rezultă:

$$(\overline{R} + \overline{R})\,\delta\overline{r} = 0$$

Convenim ca în cele ce urmează, prin deplasare virtuală să înțelegem întotdeauna deplasări compatibile cu legăturile (admise de condiţia de legătură), adică deplasări de-a lungul suprafeţei (sau curbei). Fiind vorba de deplasări virtuale, - în cazul suprafeţelor lucii sau a curbelor lucii, forța de legătură este perpendiculară pe direcția deplasării, - lucrul mecanic virtual al forţei de legătură este nul:

$$\overline{R}\,\delta\overline{r} = 0$$

3.3. Probleme speciale în cadril dinamiii puntului material

3.3.1. Mişcarea rectilinie. Căderea de la mare înălțime

3.3.1.1. Mişcarea rectilinie

Ecuația mișcării rectilinii, considerând că mișcarea are loc de-a lungul axei Ox este :

$$m\,x'' = x$$

unde x este componenta după axa Ox a forței care acționează asupra punctului material. Această forță în general este funcție de poziție (x), viteză (x' = v) și timp (t).

În cele ce urmeză vom arăta că în acele cazuri speciale când x este funcție numai de timp sau numai de viteză problema se rezolvă foarte ușor.

Convenim ca în ambele cazuri condițiile inițiale să fie :

$$\text{la } t = 0\,,\ x = x_0\ ,\ v = v_0$$

$$X = X(t)$$

Integrând în funcție de timp ecuația, se obține

$$x' = v = \frac{1}{m}\int_0^t X(t)\,dt + v_0 = \frac{1}{m}A(t) + v_0$$

unde A (t) este funcție cunoscută. Integrând a doua oară rezultă spațiul:

$$x = \frac{1}{m}\int_0^t A(t)\,dt + v_0 t + x_0$$

Se observă că această soluție satisface condițiile inițiale

$$X = X(v)$$

Scriem ecuația sub forma :

$$m \frac{dv}{dt} = X(v)$$

de unde: $t = m \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{X(v)} = t(v)$ rezultă v ca funcție de timp, $v = v(t)$ de unde se obține spațiul

$$x = \int_0^t v(t)dt + x_0$$

Rezultatele de mai sus sunt valabile și pentru cazul mișcării curbilinii a cărei ecuație este
$m\,s'' = F_s$ (s-arc).

3.3.1.2. Căderea de la mare înălțime

Considerăm că Pământul este în repaus. Neglijăm rezistența aerului. Asupra punctului material de masă m aflat la înălțimea x față de centrul Pământului acționează numai forța de gravitație universală.

Cu notațiile din figura 3.22. se poate scrie ecuația de mișcare :

$$m\,x'' = \gamma \frac{M\,m}{x^2}$$

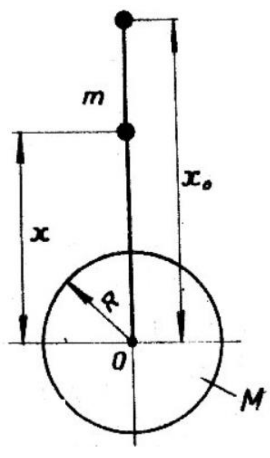


Figura 3.22.

Masa Pământului poate fi eliminată din ecuație deoarece în cazul x = R, deci la suprafața Pământului forța de atracție este : $-$m g.

$$m\,g = \gamma\,\frac{M\,m}{R^2}$$

de unde: $\gamma\,M = R^2\,g$

Cu această relație se scrie:

$$m\,x'' = -m\,\frac{R^2 g}{x^2}$$

Energia potențială conform este :

$$V = -m\,\frac{R^2 g}{x}$$

de unde prin împărțirea ecuației prin m se obține:

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{R^2 g}{x} = \text{const.}$$

Dacă corpul cade de la $x = x_0$ unde V = 0, atunci din avem :

$$-\frac{R^2 g}{x} = \text{const.}$$

și deci

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\,R^2 g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$$

Cu condițiile inițiale stabilite, rezultă timpul aparținând înălțimii x:

$$t = \frac{1}{R\sqrt{2\,g}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}$$

Calculând integrala se obține soluția explicită. Fără a efectua acest calcul putem răspunde la o întrebare importantă și anume: Cu ce viteză V atinge punctul material suprafața Pământului dacă $x_0 = \infty$ și deci x = R.

$$v = \sqrt{2\,g\,R}$$

Înlocuid valorile g= 9,81 m/s^2 și R = 6,37 $\cdot 10^6$ m rezultă v = 11,2 km $\cdot$ s^{-1}.

3.3.2. Oscilații armonice

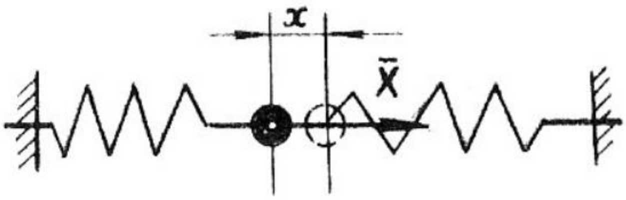


Figura 3.23.

Dacă punctul material se fixează prin intermediul unor arcuri sau fire elastice ca în figura 3.23. și se scoate din echilibru cu cantitatea x , asupra punctului va acționa o forță proporțională cu deplasarea x și dirijată spre poziția de echilibru:

$$X = -\,k\,x \qquad\qquad (k > 0)$$

Luând un caz mai general, ca în figura 3.24., forța va fi proporțională cu vectorul de poziție $\bar{r}$ și dirijată spre centrul O:

$$\bar{F} = -\,k\,\bar{r}$$

sau analitic :

$$X = -k\,x$$

$$Y = -\,k\,y$$

$$Z = -\,k\,z$$

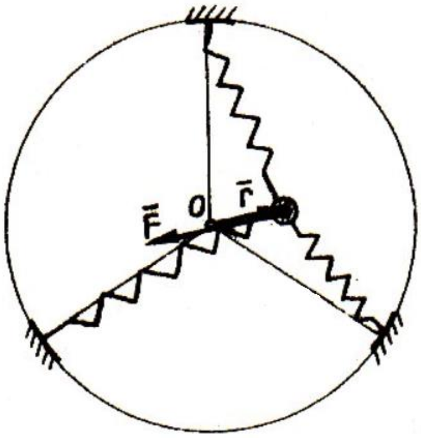


Figura 3.24.

Aceste forțe centrale, care nu întotdeauna sunt de natură elastică se numesc forțe cuasielastice.

Ecuația de mișcare a punctului material sub acțiunea forțelor cuasi-elastice este:

$$m\,\bar{r}'' = -\,k\,\bar{r}$$

$$\bar{r}'' + \omega^2\,\bar{r} = 0$$

unde am notat : $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Oscilatorul a cărei ecuație se numește oscilator armonic izotrop.

Dacă $\bar{A}$ și $\bar{B}$ sunt vectori arbitrari constanți atunci ecuația are două soluții particulare independente, așa cum rezultă:

$$\bar{r} = \bar{A}\cos\omega\,t$$

$$\bar{r} = \bar{B}\sin\omega\,t$$

și deci soluția generală este:

$$\bar{r} = \bar{A}\cos\omega\,t + \bar{B}\sin\omega\,t$$

Condițiile inițiale pentru determinarea constantelor arbitrare $\bar{A}$ și $\bar{B}$ să fie:

$$\text{la } t = 0\ ,\ \bar{r} = \bar{r}_0 \text{ și } \bar{r}' = \bar{V}_0$$

ținând cont de condițiile inițiale obținem:

$$\bar{r}_0 = \bar{A}\ \ ;\ \ \bar{V}_0 = \omega\,\bar{B}$$

valori cu care avem soluție :

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \omega t + \bar{V}_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

Vectorul de poziție căutat se compune din doi vectori și anume: un vector după direcția vectorului inițial $\bar{r}_0$ și un vector după direcția vitezei inițiale $\bar{V}_0$.

După viteza inițială $\bar{V}_0$ este pe direcția $\bar{r}_0$, vectorul $\bar{r}$ întotdeauna va fi pe această direcție. Dacă această direcție se alege drept axa Ox, atunci ecuația se scrie:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$$

Această ecuație este ecuația oscilației armonice din cinematică:

$$x = A \sin (\omega t + \varphi)$$

a cărei perioadă este :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Din cele două relații, rezultă:

$$A \cos \varphi = \frac{V_0}{\omega} \quad ; \quad A \sin \varphi = x_0$$

de unde se obține amplitudinea mișcării oscilatorii:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}}$$

și constanta de fază , din :

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{\omega x_0}{V_0}$$

3.3.3. Oscilații amortizate

În afară de forța cuasi-elastică ce dă naștere la oscilații armonice în cazul unui astfel de oscilator real intervine și forța de frecare având sensul contrar vitezei. Existența acestei forțe în timpul oscilațiilor explică micșorarea continuă a amplitudinii. Experiența arată că mărimea acestei forțe de frecare se ia proporțională cu viteza pentru viteze relativ mici, iar în cazul vitezelor mari proporțională cu pătratul acesteia.

Admițând cazul când forța de frecare este proporțională cu viteza, ecuația de mișcare va avea expresia:

$$m\,\bar{r}'' = -\,k\,\bar{r} - \beta\,\bar{r}'$$

Limitându-ne la mișcarea rectilinie, (2.249) se poate scrie sub forma:

$$m\,x'' + \beta\,x' + k\,x = 0$$

împărțind ecuația cu m și notând:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}; \qquad 2\mu = \frac{\beta}{m}$$

unde ω_0^2 este caracteristică forței cuasi-elastice iar μ frecării, rezultă ecuația de mișcare:

$$x'' + 2\,\mu\,x' + \omega_0^2\,x = 0$$

Această ecuație este o ecuație diferențială lineară omogenă în care dacă facem înlocuirea

$$x = e^{\lambda t}$$

se ajunge la ecuația caracteristică:

$$\lambda^2 + 2\,\mu\,\lambda + \omega_0^2 = 0$$

având rădăcinile :

$$\lambda_{1,2} = -\,\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Soluția generală a ecuației se compune din soluțiile particulare $e^{\lambda_1 t}$ și $e^{\lambda_2 t}$ și are forma :

$$x = C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,e^{\lambda_2 t}$$

unde C_1 și C_2 sunt constante arbitrare .

După natura rădăcinilor, care pot fi reale, complexe sau duble, distigem trei cazuri particulare:

Dacă rădăcinile sunt complexe, adică:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\,\omega$$

unde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ și $\mu < \omega_0$, conform soluția este:

$$x = e^{-\mu t}\,(C_1\, e^{i\,\omega\, t} + C_2\, e^{-i\,\omega\, t})$$

Pentru ca soluția să fie reală, introducem în locul constantelor arbitrare C_1 și C_2 două constante A și φ sub forma :

$$C_1 = \frac{A}{2}\, e^{i\,\varphi} \quad ; \quad C_2 = \frac{A}{2}\, e^{-i\,\varphi}$$

cu care rezultă :

$$x = A\, e^{-\mu t} \cos(\omega t + \varphi)$$

a. Dacă se ia în loc de φ constanta $\varphi - \frac{\pi}{2}$, ecuația are forma:

$$x = A\, e^{-\mu t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Această mișcare poate fi considerată o mișcare oscilatorie armonică a cărei amplitudine scade exponențial cu timpul. Mișcarea se numește mișcare oscilatorie armonizată având caracteristicile :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}}$$

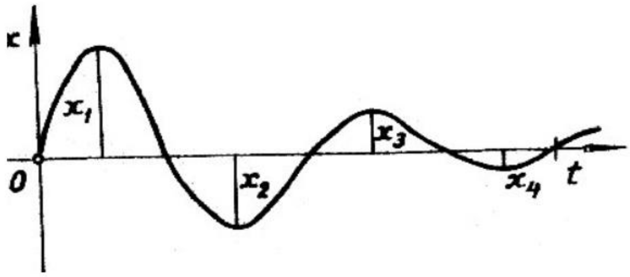


Figura 3.25.

Raportul a două elongații consecutive, de același sens este constant:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_4} = \ldots\ldots\ldots = \frac{x_n}{x_{n+2}}$$

b. Dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale, adică $\mu > \omega_0$, soluția generală este:

$$x = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}$$

unde C_1 și C_2 sunt constante arbitrare reale, iar λ_1 și λ_2, sunt negative. Din acest motiv, ambii termeni se micșorează exponențial cu timupl și deci mișcarea este o mișcare aperiodică și nu o mișcare oscilatorie.

Pentru justificarea afirmației de mai sus să alegemurmătoarele condiții inițiale

la t = 0 , x = x_0 și deci $C_1 + C_2 = 0$
la t = 0 , x' = v = v_0 , deci $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = v_0$

Din aceste condiții rezultă :

$$C_1 = -\,C_2 = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{v_0}{2\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}}$$

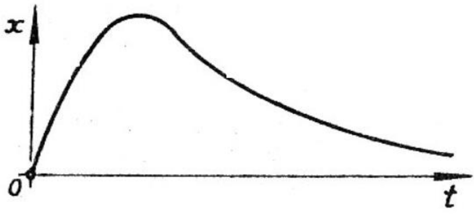


Figura 3.26.

Cu aceste valori ecuația de mișcare se scrie sub forma :

$$x = \frac{v_0}{2\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}} \left[e^{-\left(\mu - \sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t} - e^{-\left(\mu + \sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t} \right]$$

sau

$$x = \frac{v_0}{2\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}} \; e^{-\mu t}\, \mathrm{sh}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\; t \right)$$

Elongația x crește de la zero la valoarea maximă pe care o atinge la timpul t_1 ce se poate calcula din condiția x' (t_1) = 0, după care tinde din nou spre zero pentru $t \to \infty$. O astefel de mișcare are spre exemplu un pendul într-un mediu vâscos.

c. Atunci când $\mu = \omega_0$, avem cazul limită.

Din teoria ecuațiilor diferențiale se știe că în cazul rădăcinii duble a doua soluție particulară este :

$$t\, e^{-\mu t}$$

astfel că soluția generală este :

$$x = e^{-\mu t} (C_1 + C_2\, t)$$

Alegând condițiile inițiale ca la punctul b, obținem ușor că $C_1 = 0$ și $C_2 = v_0$. Rezultă deci ecuația de mișcare :

$$x = v_0\, t\, e^{-\mu t}$$

Această ecuație reprezintă tot o mișcare aperiodică.

Elongația x este numai într-un singur sens și tinde spre zero pentru $t \to \infty$.

3.3.4. Oscilații forțate. Rezonanță

Considerăm punctul material asupra căruia în afară de forța cuasi-elastică și cea de frecare mai acționează pe direcția lui x și o forță perturbatoare a cărei expresie să fie:

$$F = F_0 \cos \omega_p t$$

Se poate materializa cazul de mai sus suspendând un corp prin intermediul unui arc și mișcând capătul superior al arcului pe verticală cu frecvența circulară ω_p ca în figura 3.27.

Oscilația liberă amortizată este influențată de forța perturbatoare a cărei frecvență este $\omega_p / 2\pi$, devenind o oscilație forțată.

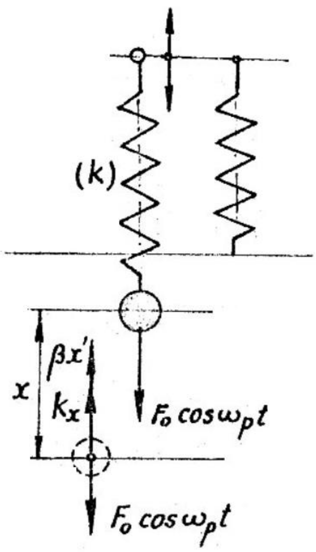


Figura 3.27.

Frecvența proprie a sistemului este $\omega/2\pi$, unde ω are expresia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$.

Ecuația acestei mișcări va fi:

$$m x'' = -k x - \beta x' + F_0 \cos \omega_p t$$

Folosind notațiile:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}; \qquad \mu = \frac{\beta}{2m}; \;\; F_0 = \frac{F_0}{m}$$

ecuația se scrie sub forma:

$$x'' + 2\,\mu\, x' + \omega_0^2\, x = f_0 \cos \omega_p\, t$$

Această ecuație diferă prin faptul că în partea dreaptă nu este zero, ci o funcție de timp. Soluția unei astfel de ecuații diferențiale neomogene rezultă cautând o soluție particulară la care se adaugă soluția generală a părții omogene.

Prin însăși forma ecuației se recomandă ca soluția particulară să fie căutată prin determminarea constantelor A și B a ecuației:

$$x = A \cos \omega_p\, t + B \sin \omega_p\, t$$

Calculele se simplifică dacă la partea dreaptă a ecuației adunăm i f_0 sin ω_p t obținând :

$$f_0\, e^{i\,\omega_p\, t}$$

Prin această schimbare desigur presupunem că și x este complex. Efectuând calculele din x-ul rezultat, luăm în considerație numai partea reală.

Se caută deci soluția ecuției:

$$x'' + 2\,\mu\, x' + \omega_0^2\, x = f_0\, e^{i\,\omega_p\, t}$$

sub forma :

$$x = A\, e^{i\,(\omega_p\, t - \alpha)}$$

este soluție pentru următoarea relație, dacă:

$$A\,(-\omega_p^2 + 2\,\mu\, i\, \omega_p\, t + \omega_0^2)\, e^{i\,(\omega_p\, t - \alpha)} = f_0\, e^{i\,\omega_p\, t}$$

adică:

$$A\,(\omega_0^2 - \omega_p^2 + i\, 2\,\mu\, \omega_p = f_0 e^{i\,\alpha} = f_0\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

Din egalitatea valorilor absolute ale celor două numere complexe rezultă:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\,\mu^2\,\omega_p^2}}$$

iar din egalitatea tangentelor directoare obținem:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mu\,\omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2}$$

Soluția generală a ecuației omogene – presupunând cazul oscilațiilor amortizate – ne este cunoscută. Rezultă deci soluția generală a ecuației diferențiale ce reprezintă oscilația forțată pentru cazul $\omega_0 > \mu$:

$$x = A\cos(\omega_p\,t - \alpha) + a\,e^{-\mu\,t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\,t + \varphi\right)$$

a și φ sunt constante de integrare care se determină din condiții inițiale.

Interpretarea rezultatului obținut ne permite să ajungem la următoarele concluzii. Mișcarea punctului material se compune dintr-o oscilație cu frecvență circulară ω_p și o oscilație amortizată având frecvența circulară $\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$.

Oscilația amortizată după un anumit timp poate fi neglijată însă timp îndelungat va persista oscilația datorită forței perturbatoare, sub acțiunea căruia punctul va executa oscilații cu frecvență circulară ω_p.

Amplitudinea acestei oscilații A, și diferența de fază dintre oscilația datorită forței perturbatoare și cea forțată, depind de frecvența circulară ω_p a forței perturbatoare. Dacă ω_p crește de la zero la valoarea ω_0, și de la ω_0 la infinit, diferența de fază α crește de la zero la $\pi/2$ și de la această valoare la π. Aceasta înseamnă că oscilația forțată rămâne în urmă în fază față de oscilația dată de forța perturbatoare. Amplitudinea A crește cu ω_p și devine maximă pentru $\omega_p = \omega_0$, după care pentru $\omega_p > \omega_0$ scade din nou.

Amplitudinea este maximă dacă frecvența forței perturbatoare se suprapune cu frecvența proprie a sistemului. Acest fenomen este cunoscut sub numele de rezonanță iar curba A = A(ω_p) este curba de rezonanță (figura 3.28.). Se vede că amplitudinea este cu atât mai mare cu cât amortizarea sistemului μ este mai mică, adică rezonanța este cu atât mai accentuată.

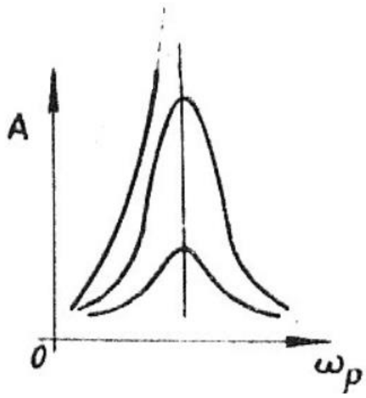


Figura 3.28.

În cazul unor sisteme fără amortizare, pentru $\omega_p = \omega_0$ amplitudinea A devine infinită. Rezonanța în acest caz în literatura de specialitate poartă numele de rezonanță de catastrofă.

Pentru valori $\omega_p >> \omega_0$ amplitudinea A scade brusc tinzând spre zero. Acest fenomen este cunoscut sub numele de autocentrare.

Analiza exactă a curbei de rezonanță este o problemă pur matematică. Amplitudinea este maximă la o valoare ω_p numită frecvență de rezonanță ω_r, pentru care:

$$\frac{d}{d\omega_p^2}(\omega_p^2 - \omega_0^2) + 4\mu^2 \omega_p^2 = 2(\omega_p^2 - \omega_0^2) + 4\mu^2 = 0$$

Adică derivata în raport cu ω_p^2 a expresiei de sub radicalul numitorului ecuației se anulează.

Din această condiție rezultă:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\mu^2}$$

Înlocuind obținem:

$$A_{max} = \frac{f_0}{2\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}}$$

deci cu cât scade μ – adică amortizarea este mai mică – crește amplitudinea A.

3.3.5. Mișcarea în câmpul gravitației universale

Analizăm mișcarea unui punct material de masă m, în câmpul gravitațional al unui punct fix de masă M. Fie M masa Soarelui, și m masa unei planete din sistemul solar. Masa Soarelui este de 330.000 ori mai mare decât a Pământului, din acest motiv, vom considera că Soarele este fix și că este originea sistemului de referință. Forța de gravitație este forță conservativă și centrală și deci sunt valabile două teoreme: teorema energiei mecanice și teorema ariilor. Mișcarea fiind mișcare plană, pentru descrierea mișcării ne servim de aceste două teoreme.

Energia potențială:

$$V = -\gamma \frac{M\,m}{r}$$

Energia cinetică în coordonate polare:

$$E_c = \frac{m\,(r'^2 + r^2\,\varphi'^2)}{2}$$

Teorema energiei cu datele de mai sus, prin împărțirea cu m se scrie:

$$\frac{1}{2}(r'^2 + r^2\,\varphi'^2) - \gamma\frac{M}{r} = C = \text{const.}$$

Teorema ariilor, în coordonate polare:

$$r^2\,\varphi' = h = \text{const.}$$

Subliniem că teorema ariilor este totodată legea a II- a a lui Kepler.

Ne propunem determinarea traiectoriei, adică r = r (φ). În acest scop din ecuațiile eliminăm timpul, φ' și r' pot fi exprimate în felul următor:

$$\varphi' = \frac{h}{r^2} \quad ; \qquad r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\varphi' = \frac{dr}{d\varphi}\frac{h}{r^2}$$

Înlocuind:

$$\left[\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} \right] - \frac{2\,\gamma\,M}{r} = 2\,C$$

se mai poate scrie:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{h}\sqrt{2\,C + \frac{2\,\gamma\,M}{r} - \frac{h^2}{r^2}}$$

sau:

$$d\,\varphi = \frac{\frac{h}{r^2}}{\sqrt{2\,C + \frac{2\,\gamma\,M}{r} - \frac{h^2}{r^2}}}\,dr$$

Integrala devine simplă dacă, expresia de sub radical se scrie forma: $\alpha^2 - u^2$, unde:

$$\alpha^2 = 2\,C + \frac{\gamma^2 M^2}{h^2} \text{ și } u = \frac{\gamma\,M}{h} - \frac{h}{r}$$

α^2 este constant, u este o nouă variabilă:

$$du = \frac{h}{r^2}\,dr$$

Cu aceste noțiuni:

$$d\,\varphi = \frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}$$

a cărei integrală:

$$\varphi + k = \arccos \frac{u}{\alpha}$$

unde, k- constantă de integrare:

$$u = \alpha \cos (\ \varphi + k\ ) = \frac{\gamma M}{h} - \frac{h}{r}$$

de unde,

$$r = \frac{h}{\frac{\gamma M}{h} - \alpha \cos (\ \varphi + k\ )} \quad = \frac{\frac{h^2}{\gamma M}}{1 - \frac{\alpha\, h}{\gamma\, M} \cos\ (\ \varphi + k\ )}$$

Notăm :

$$p = \frac{h^2}{\gamma M} \qquad ; \ \varepsilon = \frac{\alpha\, h}{\gamma\, M}$$

Dacă alegem k = 0 prin măsurarea unghiului de la raza maximă (dacă φ =0; cos (φ + k) = 1 , deci k = 0) avem ecuația traiectoriei punctului material:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

După cum se știe din geometrie analitică ecuația de mai sus – reprezintă o secțiune conică, unul din focare fiind originea sistemului de coordonate polare (punctul de masă M).

Teorema, aplicată la sistemul solar este legea I-a a lui Kepler : planetele descriu elipse, Soarele ocupând unul din focare. Desigur în cazul planetelor secțiunea conică, însă traiectoria meteorilor spre exemplu, poate fi hiperbolă sau parabolă.

$$\varepsilon = \frac{\alpha\, h}{\gamma\, M} = \frac{h}{\gamma\, M} \sqrt{2\,C + \frac{\gamma^2 M^2}{h^2}}$$

În funcție de valoarea excentricității numerice ε, secțiunea cronică este elipsă, parabolă sau hiperbolă după cum:

$$\varepsilon \geqq 1$$

În cazul special, când ε = 0 traiectoria este circulară.

Condiția ridicată la pătrat:

$$\frac{h^2}{\gamma^2 M^2}(2C+1) \geqq 1 \text{ ; deci } C \geqq 0 \text{ ; sau } \quad mC = E \geqq 0$$

Produsul $m C = E_m$ este energia mecanică totală a punctului material în mișcare, și conform:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma m M}{r} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma m M}{r_0}$$

unde r_0 – este distanța inițială dintre puncte , v_0- viteza inițială. Condiția poate fi enunțată astfel: Traiectoria este eliptică, hiperbolică sau parabolică după cum energia mecanică totală a punctului material (planetei) este negativă, nulă sau pozitivă. Cu alte cuvinte, dacă:

$$v_0 \geqq \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} = v_{cr}$$

viteza inițială v_0 este mai mică, egală sau mai mare decât o anumită viteză, numită critică.

Viteza critică v_{cr} , are următoarea semnificație : după punctul de masă m aflat în repaus față de M, cade spre M de la o distanță infinit de mare, când ajunge la o distanță r_0 față de aceasta, are chiar viteza v_{cr}.

Reamintim că punctul de energie nulă l-am fixat cu ecuația $v = -\gamma M m/r$. Energia potențială v , la infinit este nulă (r = ∞), iar la distanțe finite negativă !. În cazul traiectoriilor eliptice (distanțe finite) energia totală, din cauza energiei potențiale negative mari, adică din cauza energiei cinetice mici, este negativă.

În concluzie, energia cinetică a punctului nu este suficientă pentru ca să se îndepărteze de centrul atractiv, dincolo de o anumită distanță maximă.

Este logic că, dacă la un moment dat m se află față de M la infinit, traiectoria lui nu poate deveni niciodată eliptică numai datorită forței de gravitație deoarece elipsa nu are puncte la infinit.

3.3.5.1. Timpul de revoluție

Timpul de revoluție T se calculează ușor în cazul traiectoriei eliptice. Conform teoremei ariilor suprafața măsurată de raza vectoare în unitatea de timp:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{1}{2} r^{-2} \varphi' \right) = \frac{h}{2}$$

Integrând între limitele 0 și T, în partea stângă obținem aria elipsei A = π ab (a și b, semiaxele elipsei)

$$\pi ab = \frac{h}{2} T \qquad ; \qquad T = \frac{2\pi}{h} ab$$

În loc de b introducem parametrul p. Conform figurii 3.29. introducem notațiile:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} ;$$

$$p = \frac{b^2}{a} ;$$

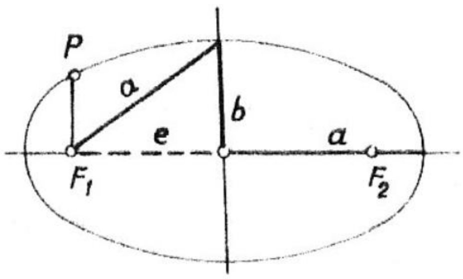


Figura 3.29.

$$b = \sqrt{pa} = \sqrt{-\frac{h^2}{M\gamma}a}$$

devine:

$$T = \frac{2\pi}{h} a \sqrt{\frac{h^2}{\gamma M}} a$$

sau:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\ \pi^2}{M}$$

În această expresie partea dreaptă este constantă, (γ acelaș pentru toate planetele din sistem; M masa) și deci pentru două planete se poate scrie:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \text{ sau } \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Expresia este cunoscută sub numele de legea a- III –a a lui Kepler: Raportul dintre pătratul timpului de revoluție și cubul semiaxei mari este același pentru toate planetele.

3.3.5.2. Ecuația energiei totale

Ecuația energiei totale E_m = m c se poate scriecu ajutorul lui ε:

$$E_m = \frac{m\,\gamma^2\,M^2}{2h^2}\ (\ \varepsilon^2 -\ 1\ )$$

avem h^2 = p γ M, rezultă:

$$E_m = \frac{\gamma\,M\,m}{2}\ \frac{a}{b}\ (\frac{a^2 - b^2}{a^2} - 1\ ) = -\ \frac{\gamma\,M\,m}{2a}$$

adică, în cazul traiectoriilor eliptice, energia totală depinde numai de axa mare a elipsei. În concluzie, dacă axele mari ale unei traiectorii eliptice sunt egale (indiferent de excentricitate!) energiile lor sunt egale. Această proprietate are însemnătate în fizica atomică.

3.3.6. Mișcarea de Pământ. Căderea liberă.

Dorind să descriem mișcarea unui punct material față de Pământ, adică mișcarea punctului față de un sistem de referință în rotație, la forța ce acționează asupra punctului trebuie să mmai adăugăm forța centrifugă și forța Coriolis:

$$F_{cf} = m\,\omega^2\ S$$

$$F_c = 2\,m\,[\,\overline{r'}\,\overline{\omega}\,]$$

În aceste relații mărimea vectorului viteză unghiulară $\overline{\omega}$ este:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{86164} = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$$

Deoarece Pământul face o rotație completă față de stelele fize în 86164 secunde.

Vom considera cazul cel mai simplu când asupra punctului material acționează numai forța de gravitație a Pământului. Pentru un observator de pe suprafața Pământului, forța gravitațională și cea centrifugală se manifestă simultan printr-o rezultantă: greutatea corpului.

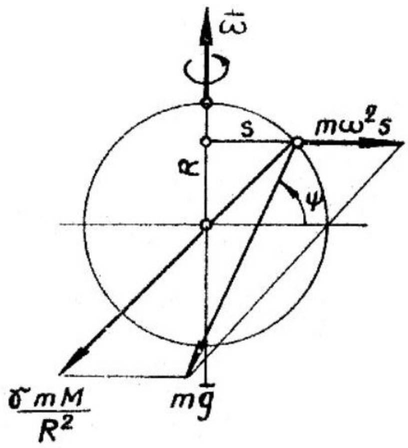


Figura 3.30.

Forța de greutate (figura 3.30.) conform definiției este $m \cdot \overline{g}$. Reținem deci, că în $m \cdot \overline{g}$ este însumată și forța centrifugă. Ecuația diferențială a mișcării pe Pământul în mișcare de rotație este:

$$m\,\overline{r''} = m \cdot \overline{g} + 2\,m\,[\,\overline{r'}\,\overline{\omega}\,]$$

Este cunoscută variația lui $\bar{g}$ (9,78 m/s^{-1} la ecuator ; 9,832 m/s^{-1} la pol). Greutatea corpului variază din cauza variației forței centrifuge în funcție de Ψ. Din acest motiv Pământul are forma de geoid și nu de sferă, și tot din această cauză $\bar{g}$ nu este dirijat spre centrul sferei și este perpendicular pe suprafața geoidă.

Desigur $\bar{g}$ variază și în funție de înălțime . și luat riguros, variază și în timp în funcție de poziția Pământului față de celelalte corpuri cerești în mișcare, care la rândul lor acționează asupra Pământului. În cazul problemelor de mecanică, mișcările au traiectorii atât de scurte încât, g poate fi considerat constant.

Alegem sistemul de coordonate cu originea în P astfel încât axa x să fie pe direcția N-S, y pe direcția V-E, și z perpendiculară pe suprafața geoidului ca în figura 3.31.

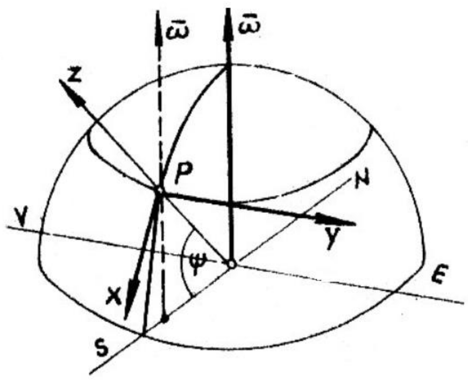


Figura 3.31.

Componentele vectorilor pe cele trei axe de coordonate sunt:

$\bar{g}$: 0 0 -g

$\bar{r}'$: x' y' z'

$\bar{\omega}$: -ω cos φ,

0

ω sin φ

Ecuațiile de mișcare vor fi:

$x'' = 2\ \omega \sin \Psi\ y$

$y''= - 2\ \omega \sin \Psi\ x' - 2\ \omega \cos \Psi\ z'$

$$z'' = - g + 2\ \omega \cos \Psi\ y'$$

Integrala ecuațiilor de mișcare pentru căderea liberă, în care caz condițiile inițiale sunt:

$$\text{la } t = 0\ ,\quad x = y = 0\ ,\ z = h\ ,$$
$$x' = y' = z' = 0$$

este destul de simplă, însă vom alege o cale mai intuitivă.

Dacă am face abstracție de rotația Pământului, la căderea liberă, componentele vitezei după x și y ar fi nule. Din acest motiv, chiar considerând rotirea Pământului, aceste componente față de componenta după axa verticală z sunt foarte mici. Intervin și termeni ce conțin ω^2. Acești termeni pot fi neglijați și obținem următoarele ecuați simple:

$$x'' = 0\ ,\ y'' = - 2\ \omega \cos \Psi\ z'\ ,\ z'' = -g$$

Integrând prima și ultima ecuație ținând cont de condițiile inițiale (2.302) obținem rezultatul binecunoscut:

$$x = 0\ ,\ z = h - \frac{1}{2} g\ t^2$$

rezultă z' = - g t, care înlocuită în expresia y'':

$$y'' = 2\ g\ t\ \omega \cos \Psi$$

ținând cont de condițiile de mai susv avem:

$$y' = g\ t^2\ \omega \cos \Psi$$

și deci:

$$y = \frac{1}{3} g\, t^3\, \omega \cos \Psi$$

Deoarece am ales axa y cu sensul pozitiv spre Est, rezultatul fiind pozitiv, înseamnă că un corp lăsat să cadă liber va devia față de verticală spre Est. (La cercul de latitudine a țării noastre, această deviație pentru un corp ce cade de la înălțimea de 100 m este 1,5 cm).

Desigur această deviație – văzută din sistemul inerțial- se datorește faptului, că la plecare considerăm punctul material ca având poziție fixă față de Pământ, deci are viteză față de sistemul inerțial.

3.3.6.1. Mișcarea pe orizontală

Pentru determinarea efectului forței Coriolis asupra punctului material în mișcare pe orizontală, descompunem vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}$ după verticala și orizontala locului ca în figura 3.32.

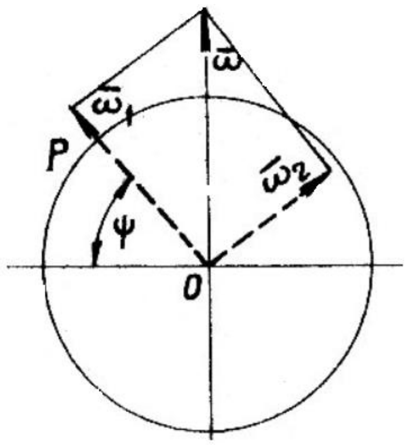


Figura 3.32.

Valorile absolute ale acestor vectori sunt:

$$\omega_1 = \omega \sin \Psi$$
$$\omega_2 = \omega \cos \Psi$$

În consecință și forța Coriolis poate fi scrisă:

$$\overline{F}_C = 2\,m\,[\,\overline{V}\,\overline{\omega_1}\,] + 2\,m\,[\,\overline{V}\,\overline{\omega_2}\,] = \overline{F}_{C1} + \overline{F}_{C2}$$

Componenta $\overline{F}_{C1}$, pe emisfera Nordică, este orizontală și perpendiculară pe vectorul viteză, având sensul spre dreapta, iar pe emisfera Sudică are sensul spre stânga. Prin urmare, corpul în mișcare pe orizontală, din cauza rotirii Pământului pe emisfera nordică devine spre dreapta, iar pe cea sudică spre stânga.
Accelerația corespunzătoare este:

$$a_C = \frac{F_{C1}}{m} = 2\,v\,\omega_1 = 2\,v\,\omega\,\sin\Psi$$

Dacă luăm $a_C = ct$, deviația în timupl t este:

$$S_C = \frac{a_C\,t^2}{2}$$

(De exemplu: un proiectil având v = 500 m/s^{-1}, la latitudinea $\Psi = 45^o$ în timupl t = 20 secunde, deci la un spațiu parcurs de 10000 m deviază cu 10 m !).
Componenta $\overline{F}_{C2}$, fiind pe verticală, se manifestă prin modificarea greutății corpurilor în mișcare.

3.3.7. Principiul lui D′Alembert. Legătura între dinamică și statistică

Dacă $\overline{F}$ este forța efectiv aplicată asupra punctului material, și $\overline{R}$ forța de legătură necunoscută ecuația fundamentală a dinamicii poate fi scrisă sub forma:

$$\overline{F} + \overline{R} - m\,\overline{r''} = 0$$

Anterior am spus că $\overline{R}\,\delta\overline{r} = 0$, prin înmulțire cu $\delta\overline{r}$ rezultă:

$$(\overline{F} - m\,\overline{r''})\quad \delta\overline{r} = 0$$

sau analitic :

$$(X - m\;\;x'')\;\delta x + (Y - m\;\;y'')\;\delta y + (Z - m\;\;z'')\;\delta z\; = 0$$

Conform ecuației, diferența $\overline{F} - m\,\overline{r''}$ poate fi considerată cota parte din forța efectiv aplicată, care nu dă naștere la accelerații. Dacă această parte a forței se consideră ca forță pierdută, se poate enunța principiul lui D′Alembert: punctul material în mișcare se deplasează astfel încât lucrul mecanic virtual al forței pierdute în orice moment este nul.

Legătura între dinamică și statică; forța de inerție. Considerăm că în ecuația produsul $(-m\,\overline{a})$ este o forță numită forță de inerție.

Comparând ecuația:

$$(\overline{F} - m\,\overline{a}) + \overline{R} = 0$$

cu ecuația din statică :

$$\overline{F} + \overline{R} = 0$$

deducem că o problemă de dinamică formal poate fi redusă la o problemă de echilibru – de statică – dacă la forța efectiv aplicată ($\overline{F}$) asupra punctului material se adaugă forța de inerție. Aceasta ne permite să determinăm legile de mișcare din legile simple ale echilibrului.

În privința noțiunii de forță de inerție subliniem următoarele, ecuația fundamentală $\overline{F} = m\,\overline{a}$ (unde desigur în loc de $\overline{F}$ poate fi scris $\overline{R}$) nu spune absolut nimic despre legătura cauzală dintre forță și accelerație. În această privință pot exista două concepții:

- forța poate fi privită ca fiind o consecință dinamică a accelerației. Această concepție este concepția dinamică despre forță.
- se poate spune că asupra corpului ce se deplasează cu accelerația $\overline{a}$ acționează și forța de inerție

$$-m\,\overline{a} = \overline{F}_i$$

și deci rezultanta tuturor forțelor în orice moment este nulă

$$\overline{F} - m\,\overline{a} = \overline{F} + \overline{F}_i = 0$$

Aceasta este concepția statică despre forță.

Cele două concepții exprimă același lucru, însă în mod diferit. Fiind vorba de aceeași ecuație, ambele concepții pot fi aplicate în cadrul problemelor însă nu simultan, deoarece în cazul concepției dinamice nu are sens să vorbim despre forță de inerție, iar în cazul concepției statice când rezultanta tuturor forțelor este nulă nu se poate spune că forța este o consecință a acceleranției.

Cele două concepții apar chiar și în cazul unor experiențe simple. Ridicând un corp de o anumită greutate și dându-i în timpul ridicării o accelerație, simțim că depunem o forță mai mare decât forța de greutate a corpului și deci putem considera această creștere a forței ca o consecință a accelerației. Tot atât de acceptabilă este însă și afirmația că din cauza accelerației simțim ca și când am ține în echilibru un corp de greutate mai mare.

În baza acestor experiențe simple putem recapitula că în cazul deplasării accelerate în sus a unui corp conform concepției statice despre forță, greutatea corpului crește, iar în cazul deplasării accelerate în jos greutatea corpului scade. În cazul căderii libere corpul nu are greutate. Desigur conform concepției dinamice această ultimă afirmație nu se poate accepta deoarece tocmai greutatea corpului este cauza accelerării cu g. Drept verificare se poate observa această scădere a greutății corpului stând pe cântar și făcând la un moment dat o genoflexiune. Cântarul va indica o greutate mai mică în timpul acestei mișcări.

3.3.7.1. Mișcarea curbilinie

Dacă punctul material se deplasează pe o curbă dată se poate scrie ecuația:

$$m\,\overline{r''} = \overline{F} + \overline{R}$$

sau

$$\overline{F} + \overline{P} \qquad m\,\overline{r''} = 0$$

Vom scrie această ecuație cu ajutorul componentelor vectorilor pe direcțiile axelor sistemului natural. Ținând cont că forța de legătură are componenta tangențială R_τ nulă
(legătură fără frecare) și că accelerația are componentele, cele trei ecuații vor fi :

$$F_\zeta \quad - m\,V' = 0$$

$$F_\nu + R_\nu - m\,\frac{V^2}{r} = 0$$

$$F_b + R_b = 0$$

Prima ecuație este ecuația de mișcare cunoscută sub forma $F_\zeta = m\,a''$. Forța F_τ fiind componenta tangențială a forței efective, modifică viteza punctului material.

A doua ecuație, exprimă echilibrul forțelor pe direcția binormalei.

A treia ecuație, de multe ori a dat naștere la confuzii. Să stabilim ce însemnătate are această ecuație.

Conform concepției dinamice despre forță, accelerația normală (centripetă) V^2/r ia naștere datorită forței centripete care are sensul accelerației si modulul.

$$\frac{m\,V^2}{r} = F_\nu + R_\nu$$

deci, suma componentelor normale ale forțelor efective și de legătură. Forța centripetă în cazul rotirii unui corp prin intermediul unui fir intr-un plan vertical este forța exercitată de către fir asupra corpului, plus componenta normală a forței de greutate a corpului.

Reacțiunea forței centripete, conform axiomei III este după normala principală, are modulul tot m V^2/r însă aceasta nu acționează asupra corpului ci asupra legăturii ! În exemplul nostru, acționează prin intermediul firului asupra mâinii și deci nu aceasta este forța centrifugă.

Conform concepției statice (D' Alambertiene) ecuația 2 are următoarea semnificație. Forța centripetă $F_\nu + R_\nu$ este echilibrată de o forță de sens contrar având modulul m V^2/r care, acționează tot asupra corpului în mișcare și este cunoscută sub numele de forță centrifugă. Prin forța centrifugă, ca de altfel prin orice forță de inerție se manifestă inerția corpului – reacțiunea corpului față de modificarea vitezei în timpul mișcării (figura 3.33.)

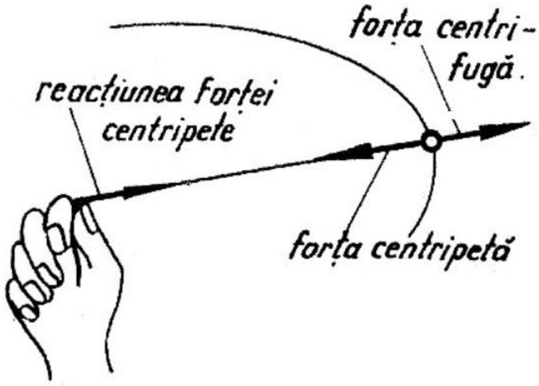


Figura 3.33.

În ecuația 3 se poate scrie raportul V^2/r cu ajutorul vitezei unghiulare de la mișcarea circulară, deoarece pe o porțiune foarte mică a curbei oarecare, mișcarea poate fi privită ca o mișcare de rotație pe un cerc de rază r.

Cu elementele de mai sus expresia forței centripete și a forței centrifuge este :

$$\bar{F}_{cp} = -\bar{F}_{cf} = \frac{m\,V^2}{r}\,\bar{\nu} = m\,\omega^2\,\bar{\nu}$$

Accentuăm din nou că până în prezent toate problemele expuse au fost considerate va având loc în sistemul de coordonate inerțial.

3.3.8. Ecuația fundamentală a dinamicii în sistemul de referință mobil

Ecuația fundamentală m $\bar{a} = \bar{F}$ cu ajutorul căruia am dedus legile stabilite până în prezent conform axiomei I au valabilitate numai în sistemul de referință inerțial. Este logic să ne punem întrebarea ce formă va avea ecuația fundamentală într-un sistem de referință S_m care are o mișcare dată față de sistemul inerțial S_i. Problema pusă are importanță practică, deoarece de multe ori este de dorit ca fenomenul să fie descris nu față de sistemul inerțial ci de exemplu, față de Pământ sau chiar față de un alt mobil.

Prima parte a problemei este pur cinematică și se referă la determinarea relației între accelerațiile unui punct în mișcare față de ambele sisteme.

3.3.8.1. Vectorul viteză unghiulară

Să presupunem că un corp rigid se rotește cu o viteză unghiulară constantă în jurul unei axe fixe. Fie vectorul $\bar{r}$, vectorul de poziție al unui punct P al corpului față de un punct oarecare O de pe axa fixă. Viteza punctului P în acest caz se poate determina, conform figurii 3.34. cu ecuația :

$$V = \omega \varrho = \omega r \sin \theta$$

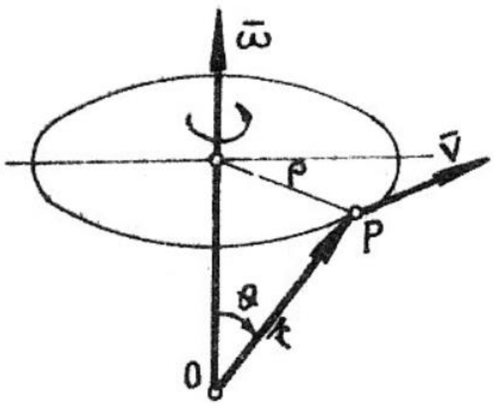


Figura 3.34.

Prin compararea celor două ecuații, ne dăm seama că partea dreaptă a ecuației exprimă valoarea absolută a unui produs vectorial format cu vectorii $\bar{\omega}$ și $\bar{r}$. Astfel viteza unghiulară este un vector pe axa de rotație având sensul astfel ales, încât cu sensul de rotație al corpului să formeze un șurub drept.

Prin introducerea notației $\bar{\omega}$, vectorul viteză a punctului P este :

$$\bar{V} = [\ \bar{\omega}\ \bar{r}\ ]$$

Această ecuație vectorială stabilește conform definiției produsului vectorial direcția și sensul vectorului viteză $\bar{V}$.

3.3.8.2. Cinematica mișcării relative

Dacă față de sistemul de referință S_i un alt sistem S_m are o mișcare dată, și dacă în fiecare sistem există câte un observator, cei doi observatori vor descrie mișcarea punctului material în mod natural. Întrebarea este: ce relație există între mișcările descrise în cele două feluri, între cele două viteze și între cele două accelerații. Sistemul S_i fiind un sistem inerțial, mișcarea punctului material față de acest sistem se va considera mișcare absolută. Vom numi mișcarea punctului material față de sistemul mobil S_m, mișcare relativă. Se obișnuiește ca mișcarea sistemului mobil față de cel fix să se numească mișcare de transport.

Identificarea diferitelor mișcări se face astfel :

a) fixăm punctul, rigid de sistemul mobil. Am anulat astfel mișcarea relativă și rămâne numai cea de transport.
b) anulăm mișcarea sistemului mobil. În acest caz singura mișcare pe care o are punctul este cea relativă.

Notăm cu x_i , y_i , z_i și x_m , y_m , z_m coordonatele punctului P după cum poziția sa este raportată la sistemul fix S_i sau mobil S_m. Vectorii de poziție vor avea expresiile:

$$\bar{r}_i = x_i\bar{\imath} + y_i\bar{\jmath} + z_i\bar{k} ,$$
$$\bar{r}_0 = x_0\bar{\imath} + y_0\bar{\jmath} + z_0\bar{k} ,$$
$$\bar{r}_m = x_m\bar{l} + y_m\bar{m} + z_m\bar{n}$$

unde am notat cu $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ vectorii unitari de pe axele sistemului mobil S_m.

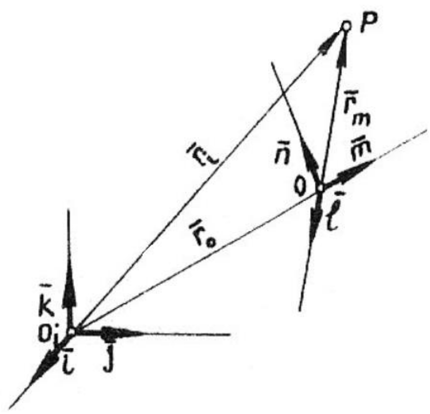


Figura 3.35.

Pentru a studia mișcarea de transport vom considera punctul P legat rigid de triedrul mobil, adică x_m , y_m și z_m sunt constante. Mișcarea de transport se reduce la mișcarea sistemului mobil. Observăm că vectorii unitari $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ sunt mobili, mișcându-se odată cu axele sistemului S_m. Mărimea lor rămâne constantă $|\bar{l}| = |\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$, dar variază poziția.

Să calculăm derivatele lor după regula dată, ținând cont că raportul dintre $d\varphi/dt$ este viteza unghiulară ω.

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = [\,\bar{\omega}_1\,\bar{l}\,]$$

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = [\,\bar{\omega}_2\,\bar{m}\,]$$

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = [\,\bar{\omega}_3\,\bar{n}\,]$$

Vectorii $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ și $\bar{\omega}_3$sunt în aparență arbitrari, independenți între ei.

Ținând însă cont de perpendicularitate:

$$\bar{l}\,\bar{m} = 0\,; \qquad \bar{m}\,\bar{n} = 0\,; \qquad \bar{n}\;\bar{l} = 0$$

Derivăm, de exemplu prima relație:

$$\frac{d\bar{l}}{dt}\,\bar{m} + \bar{l}\,\frac{d\bar{m}}{dt} = 0$$

și introducem aici expresiile găsite pentru derivate:

$$[\,\bar{\omega}_1\,\bar{l}\,]\,\bar{m} + \bar{l}\;[\,\bar{\omega}_2\,\bar{m}\,] = 0$$

în care făcând permutări de factori, rezultă:

$$[\ \bar{l}\ \bar{m}\ ]\ \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\ [\ \bar{m}\ \bar{l}\ ] = 0$$

Această relație ne arată că vectorii $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ nu sunt arbitrari. Ea are loc numai dacă $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ sunt egali.

Procedând la fel cu celelalte relații rezultă:

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}$$

Deci, derivatele vectorilor unitari de pe axele mobile sunt:

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = [\ \bar{\omega}\ \bar{l}\ ]\ ; \frac{d\bar{m}}{dt} = [\ \bar{\omega}\ \bar{m}\ ]\ ; \frac{d\bar{n}}{dt} = [\ \bar{\omega}\ \bar{n}\ ]$$

A cunoaște mișcarea triedrului mobil, înseamnă a cunoaște mișcarea unui punct oarecare al său, de exemplu P.

Să determinăm viteza lui P. Între vectorii de poziție avem relația evidentă:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_0 + \bar{r}_m$$

care prin derivare dă viteza de transport:

$$\bar{V}_{tr} = \frac{d\,\bar{r}_i}{dt} = \frac{d\,\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\,\bar{r}_m}{dt}$$

Primul termen din membrul drept reprezintă viteza originii sistemului S_m și are expresia:

$$\bar{V}_0 = \frac{d\bar{r}_0}{dt} = \frac{dx_0}{dt}\,\bar{\imath} + \frac{dy_0}{dt}\,\bar{\jmath} + \frac{dz_0}{dt}\,\bar{k}$$

Observăm că această viteză nu depinde de punctul P considerat. Ea are aceeași valoare oricare ar fi punctul de care ne ocupăm. Rezultă că toate punctele sistemului S_m au aceeași viteză $\bar{V}_0$, deci aceasta este viteza unei mișcări de translație.

Termenul al doilea are expresia:

$$\frac{d\bar{r}_m}{dt} = \frac{d}{dt}(\, x_m\, \bar{l} + y_m\, \bar{m} + z_m\, \bar{n}\,)$$

Deoarece P este rigid legat de S_m, coordonatele sale (x_m , y_m , z_m) sunt constante, așa că:

$$\frac{d\bar{r}_m}{dt} = x_m \frac{d\bar{l}}{dt} + y_m \frac{d\bar{m}}{dt} + z_m \frac{dn}{dt}$$

Ținând seamă de relațiile anterioare, putem scrie:

$$\frac{d\bar{r}_m}{dt} = [\, \bar{\omega}\, (x_m\, \bar{l} + y_m\, \bar{m} + z_m\, \bar{n}\,)] = [\, \bar{\omega}\, \bar{r}_m\,]$$

Cu aceasta, viteza de transport (devine):

$$\bar{V}_{tr} = \bar{V}_0 + [\, \bar{\omega}\, \bar{r}_m\,]$$

care arată că mișcarea sistemului S_m se compune dintr-o translație $\bar{V}_0$ și o rotație în jurul unei axe $\bar{\omega}$ ce trece prin originea acestui sistem. Vom numi această mișcare roto-translație (figura 3.36.).

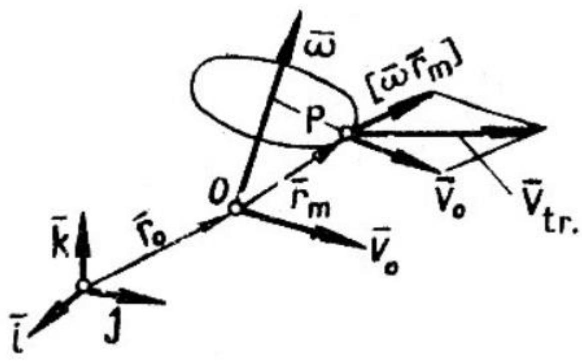


Figura 3.36.

3.3.8.3. Vitezele la mişcarea relativă

Să considerăm acum că punctul P are o mişcare relativă faţă de sistemul mobil S_m.

Coordonatele sale x_m, y_m, z_m, sunt variabile, funcții de timp. Să deducem expresia vitezei absolute a punctului P.

Derivând, obținem:

$$\overline{V}_a = \frac{d\,\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\,\bar{r}_m}{dt}$$

Termenul al doilea devine:

$$\frac{d\,\bar{r}_m}{dt} = \frac{d}{dt}(\,x_m\,\bar{l} + y_m\,\bar{m} + z_m\,\bar{n}\,) = [\,\bar{\omega}\,(\,x_m\,\bar{l} + y_m\,\bar{m} + z_m\,\bar{n}\,)] + \frac{dx_m}{dt}\bar{l} + \frac{dy_m}{dt}\bar{m} + \frac{dz_m}{dt}$$

$$\bar{n} =$$

$$[\,\bar{\omega}\,\bar{r}_m\,] + \frac{\partial\bar{r}_m}{\partial t}$$

Introducând în expresia lui $\overline{V}_a$, avem:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_0 + [\,\bar{\omega}\,\bar{r}_m\,] + \frac{\partial\bar{r}_m}{\partial t}$$

Aici primii doi termeni, reprezintă viteza de transport al triedrului mobil S_m, iar ultimul este viteza relativă a lui P. Într-adevăr, variază numai poziția punctului (x_m ,y_m , z_m) iar $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ sunt considerați constanți, deci triedrul a fost imobilizat. Notăm deci:

$$\overline{V}_{rel} = \frac{\partial\bar{r}_m}{\partial t}$$

Putem deci scrie formula generală a vitezelor în mişcare relativă:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_{tr} + \overline{V}_{rel}$$

Mărimea vitezei absolute se obține, înmulțind relația (2.210) cu ea însăși. Avem:

$$V_a^2 = V_{tr}^2 + V_{rel}^2 + 2\ (\,\overline{V}_{tr}\ \overline{V}_{rel}\,)$$

$$V_a^2 = V_{tr}^2 + V_{rel}^2 + 2\ (\,\overline{V}_{tr}\ \overline{V}_{rel}\ )\cos(\ \overline{V}_{tr}\ ,\overline{V}_{rel}\,)$$

3.3.8.4. Accelerațiile în mișcare relativă

Derivând expresia vitezei absolute, obținem accelerația absolută:

$$\bar{a}_a = \frac{d\,\overline{V}_a}{dt} = \frac{d\,\overline{V}_0}{dt} + \frac{d}{dt}\,[\ \bar{\omega}\ \bar{r}_m\ ] + \frac{d}{dt}\,(\ \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial t}\ )$$

Primul termen din membrul al doilea reprezintă accelerația $\bar{a}_0$ a originei sistemului mobil și nu depinde de punctul P considerat.

Al doilea ne dă :

$$\frac{d}{dt}\,[\ \bar{\omega}\ \bar{r}_m\ ] = [\ \bar{\varepsilon}\ \bar{r}_m\ ] + [\ \bar{\omega}\ \ \frac{d\,\bar{r}_m}{dt}\ ]$$

și ținând seamă de relația de mai sus, vom avem:

$$\frac{d}{dt}\,[\ \bar{\omega}\ \bar{r}_m\ ] = [\bar{\varepsilon}\ \bar{r}_m] + [\bar{\omega}\ [\ \bar{\omega}\ \bar{r}_m\ ]\ ] + [\bar{\omega}\ \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial t}\ ]$$

Termenul al treilea se derivează după aceleași reguli ca $\bar{r}_m$, deci:

$$\frac{d}{dt}\,(\frac{\partial \bar{r}_m}{\partial t}) = [\bar{\omega}\ \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial t}] + \frac{\partial^2 \bar{r}_m}{\partial t^2}$$

Accelerația absolută devine:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_0 + [\bar{\varepsilon}\ \bar{r}_m] + [\bar{\omega}\ [\bar{\omega}\ \bar{r}_m]] + \frac{\partial^2 \bar{r}_m}{\partial t^2} + [2\ \bar{\omega}\ \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial t}]$$

Ea se compune din trei părți:

1. Accelerația de transport:

$$\bar{a}_{tr} = \bar{a}_0 + [\bar{\varepsilon}\ \bar{r}_m] + [\bar{\omega}\ [\bar{\omega}\ \bar{r}_m]]$$

care este tocmai derivata vitezei de transport în ipoteza că $\bar{r}_m$ = const.

2. Accelerația relativă :

$$\bar{a}_{rel} = \frac{\partial^2 \bar{r}_m}{\partial t^2}$$

Se vede că este derivata vitezei relative obținută în ipoteza că sistemul S_m nu se mișcă,adică $\bar{\omega} = 0$.

3. Accelerația complimentară:

$$\bar{a}_c = 2\ [\bar{\omega}\ \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial t}\ ] = 2\ [\bar{\omega}\ \bar{V}_{rel}]$$

În concluzie, în mișcarea relativă deosebim trei accelerații:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_{tr} + \bar{a}_{rel} + \bar{a}_c$$

3.3.8.5. Ecuația fundamentală a dinamicii

Ecuația fundamentală a dinamicii în sistemul S_m rezultă prin înmulțirea acestuia cu masa m. Sistemul S_i va fi considerat ca sistem inerțial în care este valabilă ecuația $m\ \bar{a} = \bar{F}$.

Dacă deci în sistemul S_i avem:

$$m\ \bar{a}_a = \bar{F}$$

atunci în sistemul S_m vom avea:

$$m\ \bar{a}_{rel} = \bar{F} - m\ \bar{a}_0 - m\ [\bar{\omega}\ [\bar{\omega}\ \bar{r}_m]] - 2\ m\ [\bar{\omega}\ \bar{V}_{rel}] - m\ [\bar{\varepsilon}\ \bar{r}_m]$$

După cum arată ecuația anterioară, în sistemul S_m ecuația fundamentală $\overline{r}'' = \overline{F}$ nu este valabilă, deoarece în partea dreaptă în afară de forța $\overline{F}$ ce acționează asupra punctului material mai sunt patru termeni. Observatorul din sistemul S_m cunoscând mișcarea sistemului sau S_m față de sistemul S_i poate atribui apariția acestor patru forțe chiar mișcării sistemului sau și poate proceda în două moduri. Fie că renunță la descrierea fenomenelor mecanice argumentând că nu se află în sistem inerțial, fie că la forța $\overline{F}$ mai adaugă cele patru forțe, în cazul în care totuși vrea să descrie fenomenele mecanice în propriul sistem. În cazul special când $\overline{F} = 0$, cu cei patru termeni poate descrie inerția corpului, conform căruia corpul lăsat liber în sistemul inerțial (nu în sistemul S_m) se mișcă fără accelerație.

În consecință, dacă cei patru termeni considerăm că sunt "forțe de inerție" atunci putem enunța următoarele: Ecuația fundamentală a dinamicii are aplicabilitate în orice sistem de referință dacă la forțele efective ce acționează asupra punctului material adăugăm și forțele de inerție. Sistemul inerțial este caracterizat tocmai prin faptul că în acest sistem nu sunt forțe de inerție.

Dintre aceste forțe cărora le-au dat numele de forțe de inerție, două au denumire specială: al patrulea termen este forța Coriolis, al treilea este forța centrifugă.

BIBLIOGRAFIE

1. Atanasiu M. Mecanică tehnică. Ed. tehnică, București 1969;

2. Crudu, I., Stefãnescu I., Paleghian L., Panțuru D. Atlas reductoare cu roți dințate, Ed. Didactică și pedogogică, București, 1982.

3. Dunaev, P. P., Detail mașin. Izd. Vieeala Scola, Moskva,1984.

4. Duca C. Mecanisme I, P. Iași,1983;

5. Demian, T. ,ș. a. Mecanisme de mecanică fină.Ed.Did,și ped., București 1982.

6. Demian, T., Elementele constructive de mecanică fină, Ed. Did. și ped. București,1976. 13. Gafițanu M.,ș.a. Organe de mașini, Ed.tehnică,București,1983,

7. Dudiță Fl., ș.a. Mecanisme cu bare articulate. Ed. tehnică, București 1989.

8. Randra-Luca V.» Stoioa I. Introducere în teoria meoanismelor Ed. Dacia, Cluj Napoca,1982.

9. Horovitz B., ș.a. Transmisii și variatoare prin curele și lanțuri. Ed. tehnică, București 1971.

10. Manolescu N (cooordonare) Manualul inginerului mecanic.Ed. tehnică, București 1977.

11. Popescu I. Proiectarea mecanismelor plane. Ed. Scrisul Românesc Craiova, 1977

12. Popovici M. Mecanica tehnică, Ed. tehnică, București,1980. 33. Paizi Gh. ș.a. Organe de mașini și mecanisme. Ed. Did.și ped. București,1977

13. Palaghian L., Mecanisme și organe de mașini, Universitatea din Galați 1987

14. Pavel A. Elemente de inginerie mecanică, Ed. Did.și ped., București 1981.

15. Voinea R. Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie. Ed. Academiei București, 1989;