CAPITOLUL 1

ASPECTE GENERALE REFERITOARE LA ANALIZA CU ELEMENT FINIT

Necesitatea introducerii tehnicilor de calcul numeric aproximativ în activitatea de proiectare a organelor de maşini a fost generată de gradul ridicat de complexitate impus de problemele specifice proiectării şi execuției diferitelor elemente componente ale maşinilor şi utilajelor industriale. Una dintre acestea este metoda de analiză cu element finit.

În general, evoluția metodelor numerice de calcul aproximativ a urmat progresele în materie de hardware şi software ale tehnicilor interactive şi grafice, acestea devenind nu numai metode de calcul ci şi metode de proiectare adaptate pentru calculator.

Scopul unei tehnici de calcul numeric aproximativ este de a reduce ecuațiile diferențiale sau integrale, ce simulează un sistem fizic cu o infinitate de grade de libertate, împreună cu condițiile impuse pe contur, la un sistem de ecuații algebrice cu un număr finit de grade de libertate.

Majoritatea problemelor din mecanică satisfac ecuații diferențiale generale de tipul:

$$L_1(u)+b=0 \quad \text{pe domeniul A sau} \quad L_2(u)+q=0 \quad \text{pe frontiera B} \qquad (1.1)$$

unde:

$L_{1,2}$ - operatori;
b, q - funcții vectoriale cunoscute;
u - funcția vectorială necunoscută.

Soluția *u* se aproximează cu ajutorul unor funcții independente N_i şi a unor coeficienți necunoscuți u_i pe baza ecuației:

$$u \approx \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i N_i \qquad (1.2)$$

Ecuațiile algebrice de aproximație sunt obținute prin considerarea formelor reziduului ponderat sau variaționale, de tipul:

$$\int_A w_j^T (L_1 u + b) dA + \int_B \overline{w}_j^T (L_2 u + q) dB = 0 \text{ cu } j = 1..n \qquad (1.3)$$

unde w_j şi $\overline{w}_j$ sunt funcțiile de ponderare.

Existând mai multe posibilități pentru alegerea funcțiilor implicate în ecuațiile de mai sus (numite în metoda elementelor finite funcții de formă) este necesară impunerea unor anumite restricții (completitudine şi integrabilitate) pentru definirea acestora, dacă se urmăreşte obținerea unei convergențe şi aproximări mai bune.

Aproximările cu folosirea funcțiilor de pondere au fost propuse şi utilizate pentru prima oară de Galerkin.

Aproximarea pe baza ecuației (1.3) reduce problema inițială la sistemul de ecuații algebrice:

$$P(u_i) = F \quad \text{sau pentru sisteme liniare} \quad Ku = F \qquad (1.4)$$

unde, pentru problemele de proiectare a organelor de maşini, se pot stabili corespondențele: K - matricea de rigiditate a sistemului; u - vectorul tensiunilor mecanice; F - vectorul încărcărilor exterioare.

Concret, metoda analizei cu element finit constă în împărțirea (discretizarea) corpului studiat într-o rețea de entități identice - elementele finite - cu proprietăți precis determinate şi stabilirea necunoscutelor prin punerea condițiilor de echilibru în punctele de contact (noduri). Reprezentarea în calculul numeric a acestor elemente este făcută prin polinoame de diferite grade.

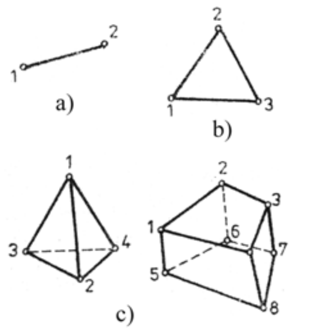

Fig. 1.1
Forme geometrice de elemente utilizate în analiza cu element finit

O rețea de elemente finite este considerată optimă atunci când precizia cerută este atinsă cu un minim de resurse pentru procesul de analiză şi calcul. O astfel de rețea implică puține grade de libertate şi elemente finite care pot fi interpolate cu polinoame de grad mic.

Cel mai adesea alegerea unui tip de element este impusă de geometria corpului studiat şi de numărul de coordonate spaţiale independente necesare descrierii sistemului. Atunci când geometria, proprietăţile materialului şi alţi parametri (tensiuni, deplasări, presiuni, temperaturi etc.) pot fi descrişi în funcţie de numai o singură coordonată spaţială, se utilizează elementul unidimensional, format din două noduri (figura 1.1a).

Fig. 1.2
Elemente de ordin superior (curbe) utilizate în analiza cu element finit

Când configuraţia sau alte caracteristici ale problemei se pot descrie în funcţie de două coordonate spaţiale independente, se utilizează elemente bidimensionale (figura 1.1b). Elementul de bază utilizat în analiza bidimensională este cel triunghiular.

Dacă geometria, proprietăţile şi alţi parametri ai corpului se pot descrie cu ajutorul a trei coordonate spaţiale independente, discretizarea poate fi făcută cu ajutorul elementelor tridimensionale (figura 1.1c).

Pentru discretizarea corpurilor cu porţiuni curbe se utilizează elemente finite curbe. Acest tip de elemente (numite şi "de ordin superior") sunt obţinute prin introducerea unui nod suplimentar pe laturile elementelor simple (figura 1.2).

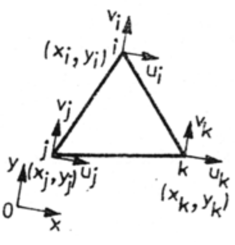

Fig. 1.3
Grade de libertate asociate cu nodurile elementelor

Fiecărui nod al unui element i se asociază grade de libertate (similare coordonatelor generalizate din mecanica clasică) care pot fi deplasări liniare, rotiri sau deformaţii (figura 1.3).

În funcţie de precizia cerută la rezolvare gradul polinoamelor ce descriu elementele finite creşte, acest fapt având drept corespondenţă geometrică creşterea numărului de noduri corespunzător elementului respectiv. Ca urmare se pot întâlni elemente uni- bi- şi tridimensionale liniare (figura 1.4a), pătratice (figura 1.4b), cubice (figura 1.4d) etc.

Pentru creşterea preciziei sunt disponibile două metode: micşorarea dimensiunii elementelor în zona de interes (metoda "H" - *H* reprezentând dimensiunea laturii elementului) sau mărirea gradului polinoamelor ce descriu elementele finite (metoda "P" - *P* reprezentând gradul polinomului corespunzător). Există posibilitatea aplicării combinate a celor două metode, pentru obţinerea rezultatelor optime.

În funcţie de relaţia care există între gradul de aproximare *R* folosit pentru transformarea de coordonate şi gradul *P* la polinoamelor de interpolare, elementele finite se clasifică în trei categorii: elemente subparametrice (R < P), elemente izoparametrice (R = P), şi superparametrice (R > P).

Elementele finite a căror formă şi funcţie de aproximare sunt descrise de polinoame de interpolare de acelaşi grad (izoparametrice)sunt cel mai des utilizate, datorită uşurinţei implementării lor şi a reprezentării precise a domeniilor neregulate (cu laturi curbe).

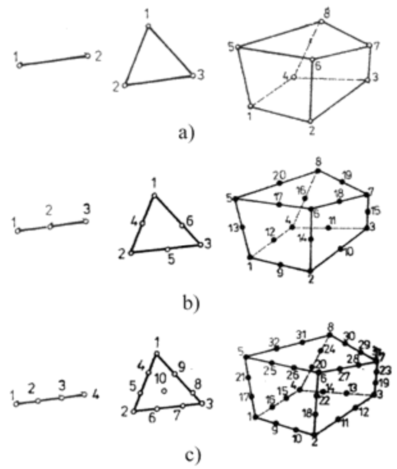

Fig. 1.4
Corespondenţa grad polinomial - număr de noduri pentru elementele finite

Rezolvarea unei probleme de proiectare prin metoda elementului finit presupune parcurgerea unor etape caracteristice:

1 - Construirea modelului.

Pe parcursul acestei etape se reprezintă geometric corpul supus analizei, împreună cu toate restricţiile de deplasare şi încărcările la care este supus.

2 - Discretizarea corpului în elemente finite.

Se alege tipul de elemente, se construieşte reţeaua de discretizare (figura 1.5), se numerotează nodurile şi elementele şi se identifică proprietăţile geometrice (coordonate, suprafeţele secţiunilor transversale etc.).

3 - Deducerea ecuațiilor corespunzătoare elementelor din rețea.

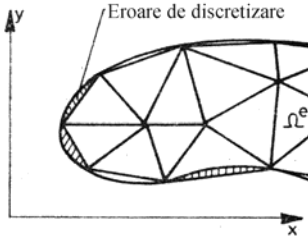

Fig. 1.5
Corp discretizat cu elemente triunghiulare

Se formulează ecuația diferențială pentru fiecare element care poate fi (pentru deplasarea transversală a unei membrane de exemplu) de forma (1.5). Se consideră o funcție necunoscută de forma (1.2) care, după substituirea în ecuația diferențială elementală, conduce la o ecuație de forma (1.4). Se deduc funcțiile de interpolare N_i care pentru exemplul considerat pot fi definite conform relației (1.6) şi se calculează termenii matricei de rigiditate *K* corespunzătoare elementului respectiv.

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+a_{\infty}u-f=0 \qquad (1.5)$$

unde coeficienții $a_{i,j}, a_{\infty}, f$, sunt cunoscuți şi condițiile de contur sunt specificate.

$$N_j(x_i y_i)=\begin{cases}0 \to i \neq j\\ 1 \to i = j\end{cases} \qquad (1.6)$$

4 - Asamblarea ecuațiilor elementale pentru obținerea ecuațiilor întregului corp

Sunt identificate condițiile de continuitate între elemente pentru variabilele primare (relații între gradele de libertate locale şi globale, conectivitatea elementelor etc.) care leagă nodurile elementelor de sistemul global. Se identifică condițiile de echilibru pentru variabilele secundare (relații între componentele locale ale forțelor şi componentele globale specificate ale acestora. Pornind de la rezultatele obținute şi de la ecuația caracteristică a metodei cu elemente finite (1.7), sunt asamblate ecuațiile elementale, ținând cont de proprietatea de suprapunere, obținându-se ecuațiile generale (1.8).

$$\sum_{i=1}^{n} K_{ij}^{(e)} u_i = F_j^{(e)} \tag{1.7}$$

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_j}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial Ni}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_j}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial N_i}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + a_{\infty} N_i N_j \right] dxdy$$

(1.8)

$$F_j^{(e)} = \int_{\Omega^e} f N_j dxdy + \int_S q_n N_j ds$$

5 - Impunerea condițiilor de contur

Se identifică gradele de libertate primare şi secundare globale specificate.

6 - Rezolvarea ecuațiilor asamblate

7 - Prelucrarea rezultatelor

Se calculează gradientul soluției sau al altor mărimi cerute cu ajutorul gradelor de libertate primare, calculate la etapa anterioară. Se reprezintă rezultatele obținute sub formă tabelară sau grafică.

La ora actuală există programe numerice special concepute pentru analiza cu element finit, ele oferind utilizatorului o serie de facilități în tratarea problemei prin automatizarea majorității operațiilor necesare parcurgerii etapelor menționate mai sus. Astfel de programe pot aborda metode multiple de rezolvare numerică a ecuațiilor generate în timpul analizei, dispun de posibilitatea utilizării diferitelor metode pentru creşterea preciziei, oferind posibilitatea tratării complete a unei probleme, începând cu construirea geometriei modelului şi terminând cu evaluarea rezultatelor.